

**Kalibration und Umrechnung von INS- und photogrammetrischen Winkeln für beliebige gegenseitige Anordnungen**

von

Manfred BÄUMKER

**14. Internationale Geodätische Woche 2007**

**Obergurgl  
Ötztal / Tirol**

**11.-17. Februar 2007**

# Kalibration und Umrechnung von INS- und photogrammetrischen Winkeln für beliebige gegenseitige Anordnungen

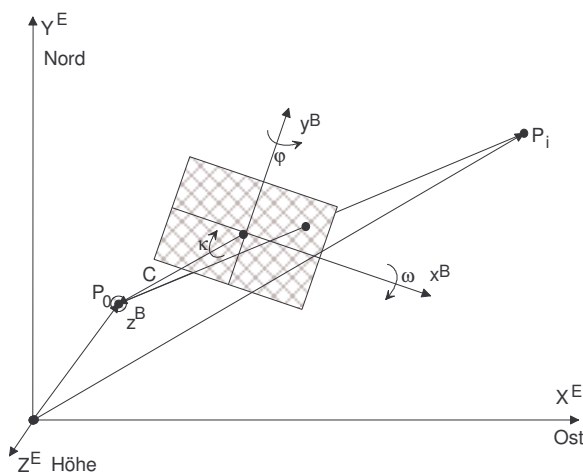
Manfred BÄUMKER

## 1 Einleitung

Für die direkte Georeferenzierung von Luftbildern mittels eines INS/GPS-Systems ist es üblich, die drei Hauptachsen des INS annähernd parallel zu den Achsen des Bildkoordinatensystems anzuordnen. Die daraus resultierenden kleinen Winkeldifferenzen wegen der nicht exakten parallelen Ausrichtung können dann i.d.R. in Form einer differentiellen (schiefsymmetrischen) Drehmatrix, die einmalig im Rahmen einer Kalibration bestimmt werden muss, berücksichtigt werden (Bäumker & Heimes 2001).

Soll die Kamera aber beliebig zu den Hauptachsen des INS angeordnet werden, z.B. in einem Fahrzeug, in dem die Blickrichtung der Kamera schräg nach vorne und abwärts geneigt ist, können die Nichtparallelitäten nicht mehr durch eine differentielle Drehmatrix berücksichtigt werden. Nachfolgend werden die notwendigen Berechnungen zur Berücksichtigung und zur Kalibration der Nichtparallelitäten unter Verwendung einer allgemeinen (orthogonalen) 3x3-Drehmatrix hergeleitet. Um dabei mögliche Probleme bei der Ausgleichung der 9 Matrixelemente in Verbindung mit der Orthogonalität der Matrix zu vermeiden, erfolgt die Berechnung über Quaternionen. Nachfolgend werden zunächst die Beziehungen zwischen den in der Inertialnavigation und der Photogrammetrie verwendeten Koordinatensysteme und Winkel hergeleitet. Anschließend wird dann die Kalibration mit Hilfe der Quaternionen beschrieben und an einem praktischen Beispiel gezeigt.

## 2 Definition der Koordinatensysteme und der Winkel in der Photogrammetrie



**Abb. 1:** Definition der Winkel und Koordinatensysteme in der Photogrammetrie

Zur Aufstellung der Kollinearitätsgleichungen muss zunächst die Beziehung des Objektkoordinatensystems ( $E$ -System) zum verdrehten Bildkoordinatensystem ( $B$ -System) hergestellt werden. Diese Beziehung wird i.d.R. durch eine Drehmatrix, die sich

aus drei Einzeldrehungen, sukzessive um die X-, Y-, und Z-Achse, zusammensetzt, beschrieben (Kraus 2004). Mit dieser Drehmatrix lässt sich ein beliebiger Vektor, der im Objektkoordinatensystem gegeben ist, in das verdrehte Bildkoordinatensystem transformieren. Zur Beschreibung eines Vektors, der vom Projektionszentrum  $P_0$  zu einem beliebigen Objektpunkt  $P_i$  zeigt, werden hier folgende Vektoren im erdfesten Objektkoordinatensystem ( $E$ -System) bzw. im Bildkoordinatensystem ( $B$ -System) definiert:

$$r_{0i}^E = r_i^E - r_0^E = \begin{bmatrix} X_i^E \\ Y_i^E \\ Z_i^E \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_0^E \\ Y_0^E \\ Z_0^E \end{bmatrix} \quad r_i^B = \begin{bmatrix} x_i^B \\ y_i^B \\ z_i^B \end{bmatrix}$$

Der obere Index bezeichnet das System, in dem der Vektor vorliegt,  $E$  für das Objektkoordinatensystem,  $B$  für das Bildkoordinatensystem. Die Beziehung zwischen den beiden Vektoren im  $E$ - bzw. im  $B$ -System wird nun über die Drehmatrix  $C_E^B$ , die von dem jeweiligen photogrammetrischen Auswertesystem abhängt, hergestellt. Der untere Index beschreibt das Ausgangssystem und der obere Index das Zielsystem, hier also die Richtung vom  $E$ -System ins  $B$ -System. In den photogrammetrischen Auswertesystemen ist die Drehmatrix, die sich aus drei sukzessiven Drehungen (Winkel  $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $\chi$ ) zusammensetzt, leider nicht einheitlich definiert. Dieses betrifft sowohl die Drehreihenfolge (primär, sekundär, tertiär) als auch die Drehrichtungen. Beispielhaft seien hier die photogrammetrischen Auswertesysteme PATB/PHIDIAS, die dieselbe Drehreihenfolge benutzen, angeführt (Benning und Schwermann 1997).

Rotationsmatrix für PATB/PHIDIAS:

$$r_i^B = C_E^B \cdot r_{0i}^E$$

$$C_E^B = f(\omega, \varphi, \chi) = R_z(-\chi) \cdot R_y(-\varphi) \cdot R_x(-\omega)$$

mit

$$R_x(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \quad R_y(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad R_z(\chi) = \begin{bmatrix} \cos \chi & -\sin \chi & 0 \\ \sin \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_E^B = \begin{bmatrix} \cos \chi \cdot \cos \varphi & \sin \chi \cdot \cos \omega + \cos \chi \cdot \sin \varphi \cdot \sin \omega & \sin \chi \cdot \sin \omega - \cos \chi \cdot \sin \varphi \cdot \cos \omega \\ -\sin \chi \cdot \cos \varphi & \cos \chi \cdot \cos \omega - \sin \chi \cdot \sin \varphi \cdot \sin \omega & \cos \chi \cdot \sin \omega + \sin \chi \cdot \sin \varphi \cdot \cos \omega \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \cdot \sin \omega & \cos \varphi \cdot \cos \omega \end{bmatrix}$$

Die Kollinearitätsgleichungen für die gemessenen Bildkoordinaten  $x'_i, y'_i$  ergeben sich dann unter Berücksichtigung der Kamerakonstante  $c$  und der Koordinaten des Projektionszentrums ( $X_0^E, Y_0^E, Z_0^E$ ) wie folgt:

$$\begin{aligned} x'_i &= -c \cdot \frac{x_i^B}{z_i^B} \\ y'_i &= -c \cdot \frac{y_i^B}{z_i^B} \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{bmatrix} x_i^B \\ y_i^B \\ -c \end{bmatrix} = C_E^B \cdot \left( \begin{bmatrix} X_i^E \\ Y_i^E \\ Z_i^E \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_0^E \\ Y_0^E \\ Z_0^E \end{bmatrix} \right)$$

### 3 Definition der Koordinatensysteme und der Winkel eines Inertialsystems

Für Hebelarmkorrekturen und andere Umrechnungen werden die aktuellen Winkel der Fahrzeughauptachsen (= körperfestes dreidimensionales Koordinatensystem, Index  $b$ ;  $x^b$  = Längsachse, positiv nach vorne;  $y^b$  = Querachse, positiv nach rechts;  $z^b$  = Hochachse, positiv nach unten) in Bezug auf das Navigationskoordinatensystem (= lokales nord- und lotrichtungsorientiertes dreidimensionales Koordinatensystem, Index  $n$ ;  $x^n$  = Nordachse,  $y^n$  = Ostachse,  $z^n$  = Vertikalachse) benutzt. Diese Winkel (Eulerwinkel) werden als Kurs-, Roll- und Nickwinkel (abgekürzt:  $\psi$ ,  $\phi$ ,  $\theta$ ) bezeichnet und werden insbesondere bei der Echtzeitnavigation zusätzlich zur Einhaltung vorgegebener Trajektorien (z.B. bei Bildflügen, Schiffsprofilen) benötigt. Die Definitionen der Fahrzeughauptachsen, des Roll-, Nick- und Kurswinkels sowie der positiven Drehrichtungen sind in Abb. 2 veranschaulicht.

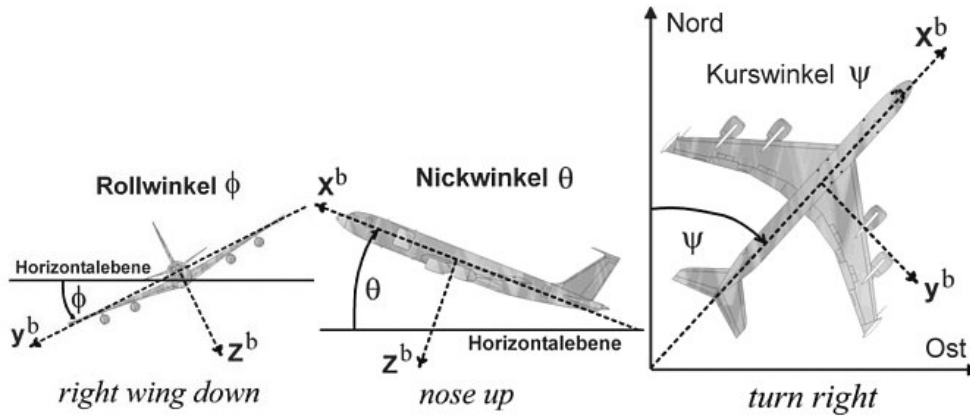


Abb. 2: Definition von Roll-, Nick- und Kurswinkel sowie der Fahrzeughauptachsen

Die Roll-, Nick- und Kurswinkel sind auch erforderlich, um im körperfesten Koordinatensystem gemessene Vektoren in das Navigationskoordinatensystem zu überführen, wozu zunächst aus den drei Drehwinkeln die  $C_b^n$ -Transformationsmatrix (Reihenfolge der Drehungen: 1. Rollwinkel  $\phi$  um  $x$ -Achse, 2. Nickwinkel  $\theta$  um  $y$ -Achse, 3. Kurswinkel  $\psi$  um  $z$ -Achse) aufzustellen ist:

$$C_b^n = R_z(\psi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_x(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$C_b^n = \begin{bmatrix} \cos \psi \cdot \cos \theta & \cos \psi \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi - \sin \psi \cdot \cos \phi & \cos \psi \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi + \sin \psi \cdot \sin \phi \\ \sin \psi \cdot \cos \theta & \sin \psi \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi + \cos \psi \cdot \cos \phi & \sin \psi \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi - \cos \psi \cdot \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \cdot \sin \phi & \cos \theta \cdot \cos \phi \end{bmatrix}$$

Da es sich hier um eine orthogonale Drehmatrix handelt, ergibt sich die inverse Drehmatrix, die die Rücktransformation (Navigationssystem ins Bodensystem) gewährleistet, in Form der transponierten Matrix:

$$C_n^b = (C_b^n)^{-1} = (C_b^n)^T = C_n^b$$

Der untere Index bei der Transformationsmatrix bezeichnet auch hier das Ursprungssystem und der obere Index das Zielsystem. Mittels dieser Transformationsmatrix lassen sich nun beliebige Vektoren (z.B. der Hebelarm der Kamera oder der GPS-Antenne) vom körperfesten Koordinatensystem ins Navigationskoordinatensystem und umgekehrt transformieren:

körperfestes Koordinatensystem  $\rightarrow$  Navigationskoordinatensystem:  $r^n = C_b^n \cdot r^b$

Navigationskoordinatensystem  $\rightarrow$  körperfeste Koordinatensystem:  $r^b = C_n^b \cdot r^n = (C_b^n)^{-1} \cdot r^n$

Aus den Einzelementen  $C_{ij}$  ( $i = \text{Zeile}, j = \text{Spalte}$ ) der Drehmatrix lassen sich bei Bedarf die Kurs- und Lagewinkel wie folgt wieder zurückgewinnen:

$$\text{Rollwinkel: } \phi = \arctan \frac{C_{32}}{C_{33}} \quad \text{Nickwinkel: } \theta = \arcsin -C_{31} = \arctan \frac{-C_{31}}{\sqrt{C_{32}^2 + C_{33}^2}}$$

$$\text{Kurswinkel: } \psi = \arctan \frac{C_{21}}{C_{11}}$$

## 4 Überführung der INS-Winkel in die photogrammetrischen Winkel

Zur Lösung dieser Aufgabe müssen einerseits die unterschiedlich definierten Koordinatensysteme und Drehwinkel und andererseits die unterschiedlich zueinander ausgerichteten Systeme (INS-System und Kamerasystem) berücksichtigt werden. Hierzu muss im Rahmen einer Kalibration eine zusätzliche Drehmatrix bestimmt werden. Da sowohl die Achsen des Objektkoordinatensystems ( $E$ -System) und des Navigationskoordinatensystems ( $n$ -System) als auch die Achsen des Bildkoordinatensystems ( $B$ -System) und des Bodykoordinatensystems ( $b$ -System) unterschiedlich definiert und orientiert sind, müssen diese Unterschiede durch zwei weitere Transformationsmatrizen berücksichtigt werden, die sich hier auf den Normalfall der Luftbildphotogrammetrie (Senkrechtaufnahme) beziehen. Für diesen Normalfall wird zunächst ein Bildkoordinatensystem  $B^*$  eingeführt. Die Hauptachsen dieses Systems sind definitionsgemäß exakt parallel zu denen des INS ausgerichtet. Erfolgt der Einbau der Kamera nun unterschiedlich zu diesem  $B^*$ -System, so muss diese unterschiedliche Ausrichtung durch eine spezielle Kalibration bestimmt werden, wobei hier folgende Transformationsmatrix  $C_{B^*}^B$  eingeführt wird. In der Aerophotogrammetrie lässt sich wegen der kleinen Drehwinkel i.d.R. auch eine differentielle Drehmatrix verwenden. Für die terrestrische Photogrammetrie, in der eine beliebige Ausrichtung der Kamera zum Objekt

üblich ist, sind diese Voraussetzungen aber nicht mehr gegeben, so dass hier eine allgemeine Drehmatrix zu verwenden ist. Diese Matrix dient zur Überführung eines Vektors vom virtuellen  $B^*$ -System der Senkrechtaufnahme in das gegebene Bildkoordinatensystem der Kamera ( $B$ -System) oder umgekehrt und berücksichtigt eine beliebige Ausrichtung der Kamera zum INS:

$$r^B = C_{B^*}^B \cdot r^{B^*}$$

$$r^{B^*} = C_B^{B^*} \cdot r^B$$

Diese universell einsetzbare Einbau- und Transformationsmatrix  $C_{B^*}^B$  lässt sich in gleicher Weise auch für die Orientierung und direkte Georeferenzierung der Messdaten eines Laserscanners einsetzen. Unter Berücksichtigung dieser zusätzlichen Transformationsmatrix  $C_{B^*}^B$  leiten sich dann die Formeln für die direkte Georeferenzierung wie folgt ab:

$$r^B = C_E^B \cdot r^E \quad r^E = (C_E^B)^T \cdot r^B \quad (C_E^B)^T = C_B^E$$

$$r^n = C_b^n \cdot r^b \quad r^b = (C_b^n)^T \cdot r^n \quad (C_b^n)^T = C_n^b$$

$$r^E = T_n^E \cdot r^n \quad r^n = (T_n^E)^T \cdot r^E \quad (T_n^E)^T = T_n^E$$

$$r^{B^*} = T_b^{B^*} \cdot r^b \quad r^b = (T_b^{B^*})^T \cdot r^{B^*} \quad (T_b^{B^*})^T = T_b^{B^*}$$

mit

$$T_n^E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(Unterschiede Objektkoordinatensystem } E\text{-System und} \\ \text{Navigationskoordinatensystem } n\text{-System, hier für PATB/PHIDIAS)} \end{array}$$

$$T_b^{B^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(Unterschiede Bildkoordinatensystem (Standardfall} \\ \text{Senkrechtaufnahme) } B^*\text{-System und INS-körperfestes} \\ \text{Koordinatensystem } b\text{-System, hier für PATB/PHIDIAS)} \end{array}$$

Sukzessives Einsetzen führt zu:

$$r^B = C_{B^*}^B \cdot r^{B^*}$$

$$r^B = C_{B^*}^B \cdot T_b^{B^*} \cdot r^b$$

$$= C_{B^*}^B \cdot T_b^{B^*} \cdot (C_b^n)^T \cdot r^n$$

$$= \underbrace{C_{B^*}^B \cdot T_b^{B^*} \cdot (C_b^n)^T \cdot (T_n^E)^T}_{C_E^B} \cdot r^E$$

$$r^B = C_E^B \cdot r^E$$

Die für die direkte Georeferenzierung benötigte  $C_E^B$  - Drehmatrix ergibt sich direkt aus den INS-Daten ( $C_b^n$ ) und den drei Transformationsmatrizen  $T_b^{B^*}$ ,  $T_n^E$ ,  $C_{B^*}^B$ . Die oben beschriebene Transformationsmatrix  $C_{B^*}^B$  muss im Rahmen einer speziellen Kalibration, in

der gleichzeitig die photogrammetrischen Winkel und die INS-Winkel bestimmt werden, einmalig ermittelt werden. Durch Umstellung der o.a. Gleichung lässt sich dann die gesuchte Transformationsmatrix  $C_{B^*}^B$  wie folgt direkt berechnen:

$$\begin{aligned} C_E^B &= C_{B^*}^B \cdot T_b^{B^*} \cdot (C_b^n)^T \cdot (T_n^E)^T \\ C_E^B \cdot T_n^E \cdot C_b^n \cdot (T_b^{B^*})^T &= C_{B^*}^B \\ C_{B^*}^B &= C_E^B \cdot T_n^E \cdot C_b^n \cdot (T_b^{B^*})^T \end{aligned}$$

Da diese orthogonale Drehmatrix 9 Elemente enthält aber zur eindeutigen Beschreibung einer Drehung im Raum nur 4 Elemente notwendig sind, sollte die Berechnung bzw. die Ausgleichung mittels Quaternionen erfolgen. Für den Fall, dass als Objektkoordinatensystem ein Gauß-Krüger- oder ein UTM-Koordinatensystem benutzt wird, muss der vom INS gelieferte Kurswinkel zusätzlich um die Meridiankonvergenz korrigiert werden. Diese Korrektur  $c_\psi$  lässt sich mit genügender Genauigkeit wie folgt berechnen:

$$c_\psi = -(\lambda - \lambda_0) \cdot \sin \varphi^* \quad \psi_{UTM} = \psi + c_\psi$$

Hierin bedeuten:

$$\begin{aligned} \varphi^* &: \text{geographische Breite} & \lambda &: \text{geographische Länge} \\ \lambda_0 &: \text{geographische Länge des Nullmeridians} \end{aligned}$$

Da bei der Definition der Drehmatrix  $C_b^n$  die Drehung  $R_z(\psi)$  die tertiäre Drehung darstellt, kann hier direkt an Stelle des INS-Winkels  $\psi$  der um die Meridiankonvergenz korrigierte Winkel  $\psi_{UTM}$  verwendet werden.

Für die direkte Georeferenzierung müssen außerdem die Abstände zwischen dem INS-Nullpunkt (Ursprung des Bodysystems) und den Projektionszentren der Kameras im Bodysystem des INS bekannt sein. Dieser Abstand (Hebelarm) lässt sich aus den geozentrischen Koordinaten der Projektionszentren  $(X_0, Y_0, Z_0)$  und des INS  $(X_{INS}, Y_{INS}, Z_{INS})$  wie folgt berechnen:

$$l^b = \begin{bmatrix} l_x^b \\ l_y^b \\ l_z^b \end{bmatrix} = (C_b^n)^T \cdot \left( \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_{INS} \\ Y_{INS} \\ Z_{INS} \end{bmatrix} \right)$$

Die Koordinaten der i.d.R. nicht zugänglichen Projektionszentren entstammen dabei einer photogrammetrischen Auswertung mittels Passpunkte. Im Fall von Gauß-Krüger- oder UTM-Koordinaten müssen die Koordinaten anschließend ins geozentrische Koordinatensystem (ETRS89), in dem auch die INS-Koordinaten vorliegen müssen, transformiert werden.

## 5 Lösung über Quaternionen

Ein nicht unwesentliches Problem stellt die in der Kalibration zu bestimmende 3x3-Transformationsmatrix  $C_{B^*}^B$  dar. Diese Transformationsmatrix enthält 9 Elemente, die als eine allgemeine orthogonale Drehmatrix mit drei sukzessiven Drehungen, ähnlich wie die drei Drehungen mit  $\omega, \phi, \kappa$  oder  $\phi, \theta, \psi$  interpretiert werden kann, wobei die Darstellung dieser Drehungen mit den drei Drehwinkeln wegen der sog. Kardansperre nicht mehr eindeutig ist. Bei der Verwendung der 9 Elemente ist zusätzlich die Orthogonalität der Matrix zu berücksichtigen, so dass sowohl die Verwendung der Transformationsmatrix mit ihren 9 Elementen als auch der Umweg über die drei Drehungen für eine Ausgleichung nicht empfehlenswert ist. Eine allgemeine Drehung lässt sich eindeutig durch genau 4 Parameter beschreiben. Hier bieten sich die Quaternionen, die üblicherweise auch bei der analytischen Plattformberechnung des INS zur Vermeidung der Kardansperre benutzt werden, an. Bei Bedarf lassen sich aus den Quaternionen jederzeit die 9 Elemente der 3x3-Drehmatrix bzw. die drei Drehwinkel (z.B. zur Anzeige für den künstlichen Horizont und den Kurszeiger) zurückgewinnen.

Die Quaternionen sind eine Verallgemeinerung der komplexen Zahlen und wurden 1843 von Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865) erdacht (van der Waerden 1976). Daher werden diese Zahlen oft auch als Hamilton-Zahlen bezeichnet. Ein Quaternion ist durch seine vier reellen Komponenten  $q_0, q_1, q_2, q_3$  eindeutig definiert. Oft wird das Quaternion als Linearkomponenten dieser vier Komponenten mit den Basiselementen  $1, i, j, k$  dargestellt als

$$q_0 + q_1 \cdot i + q_2 \cdot j + q_3 \cdot k$$

oder als

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Analog zu den komplexen Zahlen bezeichnet man die Komponente  $q_0$  auch als den Realteil oder den Skalarteil des Quaternionen. Die Komponenten  $q_1, q_2, q_3$  bilden dann den Imaginärteil bzw. den Vektorteil des Quaternionen. Die allgemeinen Rechenregeln für Quaternionen lauten:

a) Addition (assoziativ und kommutativ):

$$\begin{bmatrix} q_{0_1} \\ q_{1_1} \\ q_{2_1} \\ q_{3_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{0_2} \\ q_{1_2} \\ q_{2_2} \\ q_{3_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{0_1} + q_{0_2} \\ q_{1_1} + q_{1_2} \\ q_{2_1} + q_{2_2} \\ q_{3_1} + q_{3_2} \end{bmatrix}$$

b) Multiplikation (assoziativ aber nicht kommutativ)

$$\begin{bmatrix} q_{0_1} \\ q_{1_1} \\ q_{2_1} \\ q_{3_1} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} q_{0_2} \\ q_{1_2} \\ q_{2_2} \\ q_{3_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{0_1} \cdot q_{0_2} - q_{1_1} \cdot q_{1_2} - q_{2_1} \cdot q_{2_2} - q_{3_1} \cdot q_{3_2} \\ q_{0_1} \cdot q_{1_2} + q_{1_1} \cdot q_{0_2} + q_{2_1} \cdot q_{3_2} - q_{3_1} \cdot q_{2_2} \\ q_{0_1} \cdot q_{2_2} - q_{1_1} \cdot q_{3_2} + q_{2_1} \cdot q_{0_2} + q_{3_1} \cdot q_{1_2} \\ q_{0_1} \cdot q_{3_2} + q_{1_1} \cdot q_{2_2} - q_{2_1} \cdot q_{1_2} + q_{3_1} \cdot q_{0_2} \end{bmatrix}$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned} i \cdot j &= k & j \cdot k &= i & k \cdot i &= j \\ j \cdot i &= -k & k \cdot j &= -i & i \cdot k &= -j \\ i^2 &= -1 & j^2 &= -1 & k^2 &= -1 \end{aligned}$$

c) Norm des Quaternions

$$N(q) = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

d) Konjugierte des Quaternions

$$q^* = \begin{bmatrix} q_0 \\ -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{bmatrix}$$

Mit Hilfe der Quaternionen lassen sich Drehungen im Raum sehr einfach beschreiben und werden daher häufig auch in der Computergrafik eingesetzt. Allgemein lässt sich eine beliebige Drehung im Raum durch einen Vektor  $\vec{x}$  (Raumrichtung) und einen Drehwinkel  $a$  darstellen. Hierzu bildet man aus diesen 4 Parametern zunächst folgendes Quaternion:

$$q_{\vec{x}, a} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{a}{2}\right) \\ \frac{x \cdot \sin\left(\frac{a}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{y \cdot \sin\left(\frac{a}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{z \cdot \sin\left(\frac{a}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Die Norm dieses Quaternions ist 1.

Mit Hilfe dieses Drehquaternions lässt sich nun ein Vektor  $\vec{r}_A$  beliebig im Raum drehen. Hierzu muss der zu drehende Vektor ebenfalls in ein Quaternion  $q_r$  und dessen Konjugierte  $q_r^*$  überführt werden:

$$q_{r_A} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{r}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r_{A_x} \\ r_{A_y} \\ r_{A_z} \end{bmatrix} \quad q_{r_A}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -\vec{r}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -r_{A_x} \\ -r_{A_y} \\ -r_{A_z} \end{bmatrix}$$

Die Drehung des Vektors  $\vec{r}_A$  in den Vektor  $\vec{r}_B$  erfolgt dann mittels der Quaternionen wie folgt:

$$q_{r_B} = q_{r_A} \otimes q_{\vec{x}, \alpha} \otimes q_{r_A}^*$$

mit

$$q_{r_B} \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{r}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r_{B_x} \\ r_{B_y} \\ r_{B_z} \end{bmatrix}$$

Bei Bedarf lässt sich aus einer bereits bekannten 3x3-Drehmatrix  $C$  mit deren 9 Elementen  $C_{ij}$  das Quaternion  $q$  wie folgt berechnen:

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + C_{11} + C_{22} + C_{33}} \\ \frac{C_{32} - C_{23}}{4 \cdot q_0} \\ \frac{C_{13} - C_{31}}{4 \cdot q_0} \\ \frac{C_{21} - C_{12}}{4 \cdot q_0} \end{bmatrix}$$

Die Umkehrung gelingt mittels folgender Gleichungen:

$$C = f(q_0, q_1, q_2, q_3) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2 \cdot (q_1 \cdot q_2 - q_0 \cdot q_3) & 2 \cdot (q_1 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_2) \\ 2 \cdot (q_1 \cdot q_2 + q_0 \cdot q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2 \cdot (q_2 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_1) \\ 2 \cdot (q_1 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_2) & 2 \cdot (q_2 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

## 6 Anwendung der Quaternionen auf die Kalibration und die Umrechnung von INS- und photogrammetrischen Winkeln zur direkten Georeferenzierung

Die Umrechnung der INS-Winkel in die zur direkten Georeferenzierung benötigten photogrammetrischen Winkel erfolgt üblicherweise - wie bereits gezeigt - über die hieraus ableitbaren Drehmatrizen des INS ( $C_b^n$ , aus den Drehwinkeln  $\phi, \theta, \psi$ ) und des photogrammetrischen Auswertesystems ( $C_E^B$ , aus den Drehwinkeln  $\varphi, \omega, \kappa$ ).

$$C_E^B = C_{B^*}^B \cdot T_b^{B^*} \cdot (C_b^n)^T \cdot (T_n^E)^T \quad (\text{für die Transformation INS} \rightarrow \text{Photosystem})$$

$$C_{B^*}^B = C_E^B \cdot T_n^E \cdot C_b^n \cdot (T_b^{B^*})^T \quad (\text{für die Kalibration von } C_{B^*}^B)$$

Für diese Transformation wird u.a. auch die allgemeine Drehmatrix  $C_{B^*}^B$  benötigt, die die nichtparallele Ausrichtung der drei orthogonalen Koordinatenachsen des Bodysystems des INS gegenüber den drei orthogonalen Koordinatenachsen des photogrammetrischen Bildkoordinatensystems berücksichtigt, wobei hier im Gegensatz zur Aerophotogrammetrie nicht von einer annähernd parallelen Ausrichtung der beiden Koordinatensysteme ausgegangen werden kann. Da die Koordinatenachsen der beiden Systeme und das Projektionszentrum der Kamera i.d.R. nicht direkt zugänglich sind, empfiehlt es sich, die allgemeine Drehmatrix  $C_{B^*}^B$  und die Unterschiede der Ursprünge der beiden Koordinatensysteme (Hebelarme) im Rahmen einer Kalibration zu bestimmen, wobei sich die Drehmatrix unabhängig von den Hebelarmen bestimmen lässt. Wegen der Probleme bei der Verwendung einer allgemeinen Drehmatrix mit 9 Elementen bzw. von drei Drehwinkeln empfiehlt sich die Kalibration auf der Basis von Quaternionen. Für Kalibration werden die unabhängig voneinander bestimmten INS-Winkel und die Winkel des photogrammetrischen Auswertesystems (z.B. aus einer photogrammetrischen Auswertung über Passpunkte) oder deren Drehmatrizen benötigt. Zur Vereinfachung werden zunächst die beiden Transformationsmatrizen  $C_1, C_2$  gebildet und diese in die entsprechenden Quaternionen  $q_{c_1}, q_{c_2}$  überführt:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_E^B \cdot T_n^E & q_{c_1} &= f(C_1) \\ C_2 &= C_b^n \cdot (T_b^{B^*})^T & \text{und } q_{c_2} &= f(C_2) \end{aligned}$$

Das im Rahmen der Kalibration gesuchte Quaternion  $q_{B^*B}$  berechnet sich dann nach:

$$q_{B^*B} = q_{c_2} \otimes q_{c_1}$$

Werden für die Kalibration nun mehr als ein Foto benutzt, so erhält man für jedes Foto  $i$  ein neues Quaternion  $q_{B^*B_i}$ , so dass hier eine Überbestimmung vorliegt. Die Ausgleichung gestaltet sich hier im Gegensatz zu der Verwendung einer 3x3-Drehmatrix bzw. von drei Drehwinkeln sehr einfach: Die vier Komponenten  $q_j$  des Quaternions können einfach einzeln gemittelt werden, wobei auch eine gewogene Mittelbildung möglich ist:

$$\bar{q}_j = \frac{\sum_{i=1}^n (q_{j_i} \cdot p_i)}{\sum_{i=1}^n p_i}, \quad n: \text{Anzahl der Fotos, } j = 0, 1, 2, 3$$

Nach dieser Mittelung muss das Quaternion noch zusätzlich nach folgender Vorschrift *renormalisiert* werden:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 - \bar{q}_0^2 - \bar{q}_1^2 - \bar{q}_2^2 - \bar{q}_3^2 \\ \bar{q}_j(\text{renormiert}) &= \bar{q}_j \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \end{aligned}$$

Aus dem so gemittelten und renormierten Quaternion lässt sich dann bei Bedarf die gesuchte 3x3-Transformationmatrix  $C_{B^*}^B$  berechnen:

$$C_{B^*}^B = f(q_{B^*B})$$

Selbstverständlich lassen sich auch sämtliche Berechnungen und Transformationen allein auf Quaternionenbasis durchführen, so dass gänzlich auf die Verwendung der 3x3-Transformationsmatrizen verzichtet werden kann. Zusätzlich können die bei der Mittelung der Quaternionen berechneten Restabweichungen auch in entsprechende Winkeldifferenzen für die INS-Winkel oder für die Winkel des photogrammetrischen Auswertesystems umgerechnet werden. Dabei ist aber zu beachten, dass in der Nähe der Kardansperre die aus den Restabweichungen berechenbaren Winkeldifferenzen sehr große Beträge annehmen können und daher nicht unbedingt ein Qualitätsmerkmal für die Transformationsgenauigkeit sind.

Das nachfolgende Beispiel zeigt die Kalibrierungsergebnisse für die linke und rechte Kamera, die zusammen mit dem INS auf dem Dach des Vermessungsfahrzeugs montiert sind (Abb. 3). Vor bzw. nach jeder Testfahrt wird ein Testfeld mit koordinatenmäßig bekannten Referenzpunkten (Abb. 4) angefahren und von mehreren Positionen und Blickwinkeln aus das Testfeld mit den zu kalibrierenden Kameras aufgenommen.



**Abb. 3:** Das Vermessungsfahrzeug, hier mit 4 Kameras vom Typ Canon EOS1 dem Inertialsystem (INS) LCI-6x und der GPS-Antenne auf dem Dach und den beiden Weggebern (Odometer) an den Hinterräder

Aus den unabhängig voneinander bestimmten 3D-Positionen und den Winkeln des hybriden INS/GPS/Odometer-Systems und denen der photogrammetrischen Auswertung (z.B. PATB/PHIDIAS) werden dann die Hebelarme der beiden Kameras und deren Transformationsquaternionen bestimmt. In dem nachfolgenden Beispiel wurden jeweils drei Fotos für die Kalibration benutzt. Die Ergebnisse in den Tabellen 1 – 5 zeigen, dass die Hebelarme der beiden Kameras und die daraus ableitbare Basis  $b$  mit einer Standardabweichung von ca. 0.01 m und die Transformationsmatrix mit einer umgerechneten Standardabweichung von ca.  $0.02^\circ$  bestimmt werden können.



**Abb. 4:** Das Testfeld mit den koordinatenmäßig bekannten kodierten Zielmarken (System ETRS 89)

**Tabelle 1:** INS-Winkel ( $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ) und Winkel ( $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\kappa$ ) aus der photogrammetrischen Auswertung mit PHIDIAS

Bild-paar	$\phi$ [ $^\circ$ ]	$\theta$ [ $^\circ$ ]	$\psi$ [ $^\circ$ ]	$\phi_{\text{links}}$ [ $^\circ$ ]	$\omega_{\text{links}}$ [ $^\circ$ ]	$\kappa_{\text{links}}$ [ $^\circ$ ]	$\phi_{\text{rechts}}$ [ $^\circ$ ]	$\omega_{\text{rechts}}$ [ $^\circ$ ]	$\kappa_{\text{rechts}}$ [ $^\circ$ ]
274	-0.900	-1.530	27.285	-35.1259	90.6859	-4.1451	-26.2860	90.0559	-3.6484
275	-0.830	-1.200	24.455	-32.0275	91.3702	-3.5535	-23.2553	90.5881	-3.0746
276	-0.840	-1.040	22.845	-30.2797	91.7259	-3.1771	-21.4151	90.9476	-2.6669

**Tabelle 2:** Transformationsquaternion für die linke Kamera

Bild links	q-Winkel [ $^\circ$ ]	$q_0$ [-]	$q_1$ [-]	$q_2$ [-]	$q_3$ [-]
274	84.4349	0.74060	-0.67077	0.02438	0.03130
275	84.4448	0.74054	-0.67084	0.02423	0.01346
276	84.4680	0.74041	-0.67098	0.02434	0.03151
Mittel	84.4492	0.74052	-0.67086	0.02432	0.03142

**Tabelle 3:** Transformationsquaternion für die rechte Kamera

Bild rechts	q-Winkel [°]	q <sub>0</sub> [-]	q <sub>1</sub> [-]	q <sub>2</sub> [-]	q <sub>3</sub> [-]
274	83.4322	0.74645	-0.66476	-0.02288	-0.01941
275	83.3802	0.74675	-0.66445	-0.02256	-0.01901
276	83.4449	0.74638	-0.66484	-0.02296	-0.01956
Mittel	84.4191	0.74653	-0.66468	-0.02280	-0.01933

**Tabelle 4:** Hebelarme und Basis b für die linke und rechte Kamera im INS-Koordinatensystem (Bodysystem, b-System)

Bild-paar	X <sub>links</sub> [m]	Y <sub>links</sub> [m]	Z <sub>links</sub> [m]	X <sub>rechts</sub> [m]	Y <sub>rechts</sub> [m]	Z <sub>rechts</sub> [m]	Basis b [m]
274	1.4590	-1.1625	-0.2630	1.4270	1.1787	-0.2470	2.341
275	1.4643	-1.1802	-0.2117	1.4293	1.1532	-0.2063	2.334
276	1.4547	-1.1712	-0.2049	1.4202	1.1807	-0.1950	2.352
Mittel	1.4593	-1.1713	-0.2266	1.4255	1.1709	-0.2161	2.342

**Tabelle 5:** Aus den Quaternionendifferenzen zum Mittel umgerechnete Verbesserungen für die INS-Winkel bzw. für die photogrammetrischen Winkel

Bild links	V <sub>φ</sub> [°]	V <sub>θ</sub> [°]	V <sub>ψ</sub> [°]	V <sub>φ-links</sub> [°]	V <sub>φ-links</sub> [°]	V <sub>κ-links</sub> [°]
274	-0.0141	-0.0147	0.0053	-0.0053	0.0173	-0.0085
275	0.0102	-0.0040	-0.0031	-0.0048	0.0057	0.0132
276	0.0040	0.0187	0.0085	0.0099	-0.0223	-0.0031
Bild rechts	V <sub>φ</sub> [°]	V <sub>θ</sub> [°]	V <sub>ψ</sub> [°]	V <sub>φ-rechts</sub> [°]	V <sub>φ-rechts</sub> [°]	V <sub>κ-rechts</sub> [°]
274	0.0011	0.0125	-0.0138	-0.0143	-0.0162	-0.0082
275	0.0014	-0.0371	0.0460	0.0479	0.0467	0.0276
276	-0.0025	0.0245	-0.0323	-0.0337	-0.0304	-0.0192

## 7 Zusammenfassung

Für die direkte Georeferenzierung von photogrammetrischen Daten oder von Daten eines Laserscanners mittels der Positionen und Winkel eines Navigationssystems (INS/GPS) müssen einerseits die gegenseitige Ausrichtung (Orientierung) und andererseits die Abstände (Hebelarme) zwischen den beiden Systemen bekannt sein. Für die Orientierung der Bilddaten ist außerdem die vom photogrammetrischen Auswertesystem abhängige Definition und Drehreihenfolge der Winkel zu berücksichtigen.

Ausgehend von dem Standardfall der Senkrechtaufnahme werden die formelmäßigen Zusammenhänge zwischen den photogrammetrischen Winkeln ( $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\kappa$ ) und den INS-Winkeln ( $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ) für beliebige Orientierungen und Achsausrichtungen hergeleitet. Durch Umstellung dieser allgemeingültigen Formeln lässt sich daraus die für die Umrechnung notwendige 3x3-Einbau- oder Transformationsmatrix, die eine beliebige gegenseitige Orientierung berücksichtigt, im Rahmen einer speziellen Kalibration ermitteln. Die Berechnung der 3x3-Transformationsmatrix erfolgt hier über einen Quaternionenalgorithmus, da mit den 4 Elementen eines Quaternions eine eindeutige Beschreibung einer Drehung im Raum möglich ist. Außerdem gestaltet sich die Ausgleichung für den Fall einer Überbestimmung bei Verwendung von Quaternionen

erheblich einfacher als bei der Verwendung von drei Drehwinkeln oder einer 3x3-Matrix. Für die Berechnung des Transformationsquaternions müssen für mindestens ein Bild die photogrammetrischen als auch die INS-Winkel gegeben sein. Aus den 3D-Koordinaten des Projektionszentrums der Kamera und denen des Koordinatenursprungs des INS ergibt sich unter Berücksichtigung der INS-Winkel der Hebelarm der Kamera im körperfesten Koordinatensystem des INS.

Das angeführte Beispiel, in dem die Kalibrationsmethode auf zwei auf dem Dach eines Fahrzeugs montierte Kameras angewendet wird, zeigt, dass sich die aus dem Transformationsquaternion ableitbaren Drehwinkel mit einer Genauigkeit von ca.  $0.02^\circ$  und die Hebelarme bzw. die Basis  $b$  zwischen den beiden Kameras mit einer Genauigkeit von ca. 0.01 m bestimmen lassen. Mit dieser Genauigkeit lassen sich anschließend bei der direkten Georeferenzierung ( $\omega, \phi, \kappa$ ) der Bilddaten auch die INS-Winkel ( $\phi, \theta, \psi$ ) mit Hilfe der Quaternionen in die photogrammetrischen Winkel umrechnen, wobei die Umrechnung von dem jeweiligen photogrammetrischen Auswertesystem abhängt.

Vielfach ist dabei den photogrammetrischen Anwendern die Definition der Drehungen und Drehreihenfolge des Auswertesystems nicht bekannt. Aus diesem Grunde wäre es zweckmäßig, sämtliche Drehungen nur durch die eindeutig definierten Quaternionen zu beschreiben – zumal die photogrammetrischen Winkel ohnehin ein Relikt aus den Tagen der analogen Auswertesysteme sind. In der Inertialnavigation werden die Quaternionen bereits seit der Entwicklung der Strapdown-Systeme und der damit verbundenen analytischen Plattformberechnung verwendet. Die zur Flugführung und für die Anzeigeeinstrumente (z.B. künstlicher Horizont) notwendigen Roll-, Nick- und Kurswinkel werden dann bei Bedarf direkt aus dem aktuellen Quaternion berechnet.

Die hier angeführten Quaternionen und damit verbundenen Algorithmen lassen sich ohne Weiteres auch für die Kollinearitätsgleichungen verwenden, so dass eine Umrechnung der INS-Winkel in die photogrammetrischen Winkel nicht unbedingt notwendig ist und komplett durch die Quaternionalgorithmen ersetzt werden kann. Auf diese Weise könnten die verschiedenen definierten photogrammetrischen Auswertesysteme einheitlich behandelt werden - Hamilton sei Dank!

## Literatur

*Bäumker, M, F.-J. Heimes (2001):* New Calibration and Computing Method for Direct Georeferencing of Image and Scanner Data Using the Position and Angular Data of an Hybrid Inertial Navigation System. In: Proceedings OEEPE Workshop Integrated Sensor Orientation, Hannover, 17.-18.9.2001.

*Bäumker, (2002):* Hybride Messtechnik, GPS, INS und Stützsensoren. In: Proceedings des Seminars Kinematische Anwendungen auf Straße und Schiene, Neubiberg, 17.-19.9.2002.

*Bäumker, M, H. Hahn, F.-J. Heimes, G. Vestjens (2003):* Ein strenges funktionales Modell für die direkte Georeferenzierung und modellgestützte Regelung einer

- Fernerkundungsplattform. In: Proceedings 23. Wissenschaftlich-Technische Jahrestagung der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie, Fernerkundung und Geoinformation (DGPF), Bochum, 9.-11.9. 2003.
- Benning, W. und R. Schwermann (1997):* PHIDIAS-MS - eine digitale Photogrammetrieapplikation unter MicroStation für Nahbereichsanwendungen. Allg. Vermessungsnachrichten AVN 104, S. 16-25, 1997.
- Korn, G. A. and Th. M. Korn (1968):* Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review. McGraw-Hill Handbooks. McGraw-Hill, New York, NY, second edition, 1968.
- Kraus, K. (2004):* Photogrammetrie. Band 1. Geometrische Informationen aus Photographien und Laserscanneraufnahmen. 7. Aufl., de Gruyter Lehrbuch, Berlin 2004, ISBN 3-11-017708-0, 2004.
- Schmieder, L.(1985):* Quaternionen und ihre Anwendung auf die Kreiseltheorie. Zeitschrift für Flugwiss. u. Weltraumforschung, Heft 5, S. 302-130, 1985.
- van der Waerden, B. L. (1976):* Hamilton's discovery of quaternions. *Math. Mag.* **49** (5) (1976), S. 227-234, 1976.

Anschrift des Autors:

Prof. Dr.-Ing. Manfred Bäumker  
Fachbereich Vermessungswesen und Geoinformatik  
FH Bochum  
Lennershofstr. 140  
44801 Bochum