



IMBS
**Institut für Mikrotechnische
Bauelemente und Systeme**

Praktikum Mikrosystemtechnik – MS

*Einführung in die
FEM-Simulation mit
Comsol Multiphysics*

Inhaltsverzeichnis

1.	COMSOL Desktop®	3
1.1	The Model Builder and the Application Builder	5
1.2	Preferences	6
1.3	Creating a New Model	7
1.3.1	CREATING A MODEL GUIDED BY THE MODEL WIZARD	7
1.3.2	CREATING A BLANK MODEL	8
1.4	The Ribbon and Quick Access Toolbar	8
1.4.1	THE RIBBON VS. THE MODEL BUILDER	9
1.4.2	THE QUICK ACCESS TOOLBAR	9
1.5	The Model Builder and the Model Tree	9
1.5.1	THE ROOT, GLOBAL DEFINITIONS, AND RESULTS NODES	9
1.5.2	THE COMPONENT AND STUDY NODES	10
1.6	Workflow and Sequence of Operations	11
2.	2D-Balkonplatte	12
2.1	2D-Aufgabenstellung	12
2.2	2D-Idealisierung	12
2.3	Start des Programms COMSOL Multiphysics	12
2.4	Preprocessing (2D)	14
2.4.1	2D-Geometriemodellierung	14
2.4.2	Der Elementtyp	17
2.4.3	Die Materialdaten	18
2.4.4	Die 2D-Randbedingungen	18
2.4.5	Das Vernetzen	20
2.5	Die Berechnung des 2D-Lastfalles	20
2.6	Das 2D-Postprocessing	21
2.6.1	Die 2D-Verschiebungen	21
2.6.2	Die 2D-Spannungsverteilung	22
2.6.3	Die Spannungen entlang von Schnitten im 2D-Modell	23
3.	3D-Balkonplatte	25
3.1	3D-Aufgabenstellung	25
3.2	3D-Idealisierung	25
3.3	Preprocessing (3D)	25
3.3.1	3D-Geometriemodellierung	25
3.3.2	Die 3D-Materialdaten	25
3.3.3	Die 3D-Randbedingungen	26
3.3.4	Das 3D-Netz	26
3.4	Die Berechnung des 3D-Lastfalles	27
3.5	Das 3D-Postprocessing	27
3.5.1	Die 3D-Verschiebungen	27
3.5.2	Die Spannungen entlang von Schnitten im 3D-Modell	28
4.	Weitere Postprocessingmöglichkeiten	29
4.1	Export von Ergebnissen	29
4.2	Ermittlung von Minima und Maxima	30

5.	Analytische Berechnungen zur Druckmembran	31
5.1	Kirchhoff'sche Plattengleichung.....	31
5.2	Näherungsform der Kirchhoff'schen Plattengleichung.....	31
5.3	Radiale und Tangentiale Spannungskomponente der Kreismembran.....	34
5.4	Nullstellen der radialen und tangentialen Spannungskomponente von Kreismembranen.....	35

Vorwort zum Mikrosystemtechnik-Praktikum:

FEM-Simulationen in der Mikrosystemtechnik

Warum ist die **Finite Elemente Methode (F E M)** für Ingenieure aller Fachrichtungen (auch der Mikrosystemtechnik) wichtig?

Die Finite-Element-Methode (FEM) hat sich als das rechnerische **Simulationsverfahren der Praxis** durchgesetzt und wird **in allen Branchen** bei Konstruktions- und Entwicklungsaufgaben angewandt. Sie trägt zur Erhöhung der Sicherheit, zur Konstruktionsoptimierung, zur Qualitätsverbesserung und zur Verkürzung von Entwicklungszeiten bei. Mit der FEM werden Festigkeits- und Temperaturfeldprobleme analysiert, elektromagnetische und gekoppelte Feldprobleme gelöst sowie akustische Untersuchungen und Strömungssimulationen durchgeführt.

Dieses Praktikum vermittelt praxisnah **erste Grundkenntnisse** für den Einsatz der FEM und für die Bewertung von Lösungen, die mit der FEM erzielt werden können.

Auf der Basis des von der Firma COMSOL erfolgreich eingeführten Programm MULTIPHYSICS 5.2 wird gezeigt, wie und welche Daten für eine FEM-Berechnung aufbereitet werden müssen und wie die Ergebnisse der FEM-Berechnung auszuwerten sind. Beispiele aus der Strukturmechanik werden ausführlich erläutert und auf ein Beispiel der Mikrosystemtechnik angewendet: Simulation verschiedener mikromechanischer Membrananordnungen für Druck- oder Beschleunigungssensoren. Der durch den Herstellungsprozess entstehende, intrinsische Zug- oder Druckstress (mechanische Spannungen) soll dabei wahlweise berücksichtigt werden. Die Idealisierung, die Berechnung und die Auswertung werden dabei im Detail verfolgt.

Das Praktikum basiert auf der uneingeschränkten Version von MULTIPHYSICS 5.2, das es erlaubt, „Multiphysics-Simulations“ unter einer Windows- oder LINUX-Umgebung durchzuführen. Es können ebenso Probleme aus **jeder Technikbranche** (Maschinenbau, Elektrotechnik, Bauwesen, Anlagenbau usw.) oder **jeder Fachdisziplin** (Strukturmechanik, Temperaturfeld, elektromagnetische Felder, Fluidodynamik usw.) selbsttätig durchgeführt werden. Hauptziel in der Mikrosystemtechnik ist:

Design, Simulation und Test, d.h. die Entwicklung und Erprobung virtueller Mikrosysteme

Die Komplexität von Mikrosystemen erfordert, dass das „bottom up“-Konzept durch das „top down“-Konzept ersetzt wird. Nur so lassen sich Systeme im wirtschaftlich vertretbaren Rahmen als Produkte realisieren. Daraus resultiert die zwingende Notwendigkeit in „Systemen zu denken“. Entscheidendes Werkzeug für den Entwickler ist eine geeignete und anwenderfreundliche CAE-Umgebung, die fachübergreifendes Wissen beinhaltet: d.h. es muss eine geschlossene Durchgängigkeit vom Design über die Komponentensimulation bis hin zur vollständigen Systemsimulation erreicht werden. Diese Durchgängigkeit ist bisher noch nicht ganz gegeben. Nach aktuellen Einschätzungen von mir und meinen Kollegen wie z.B. den Experten Prof. Wachutka, ETH Zürich TU- München oder Dr. Lahrman TU-Berlin oder Dr. Lefrath Mechatronik Laboratorium der Univ. Paderborn ist diese vollständige Durchgängigkeit in einigen Unternehmen bereits verfügbar.

Das Ziel der virtuellen Herstellung von Mikrosystemen, die auch als MEMS bezeichnet werden (Micro Electro Mechanical Systems bzw. „MEchatronische MikroSysteme“), ist von besonderer Bedeutung für die Zukunft:

Aufgrund der hohen Anzahl von kombinatorischen Verknüpfungen wird der Mikrosystemmarkt in Zukunft nicht von Großserienproduktionen dominiert werden, sondern von einer Vielzahl von hoch spezialisierten Produkten im kleinen bis mittleren Stückzahlenbereich bestimmt sein. Gleichzeitig werden auch in der Zukunft nur wenige Firmen über die sehr kostenintensiven Technologien verfügen, die zur Herstellung von Mikrosystemen MS nötig sind. Dagegen ist zu erwarten, dass eine Vielzahl von kleineren Unternehmen MS und auf MS basierende Produkte entwickeln werden und die Fertigung von Dienstleistungszentren im Unterauftrag durchführen lassen:

Die Trennung zwischen Herstellern und Entwicklern erhöht somit den Bedarf an Mechatronik- oder MS-Ingenieuren, die Prototypen auf der Rechnerebene entwerfen, simulieren und in Applikationslaboren testen können.

In diesem Sinne ist das Praktikum erst der erste Schritt zum Erfolg!

Praktikumsziel:

Das Praktikum soll die Studierenden im späteren Berufsleben als Fach- und Führungskräfte in Konstruktions-, Entwicklungs- und Forschungsabteilungen aller Branchen (Automobilbau, Luft- und Raumfahrttechnik, Maschinenbau, Konsumgüterindustrie, Medizintechnik, Elektrotechnik) motivieren, die FEM als leistungsfähiges Entwicklungswerkzeug zu begreifen und entsprechend zu nutzen.

Bochum, den 13.10.2005



(Prof. Dr. rer. nat. Johannes Zacheja)

1. COMSOL Desktop®

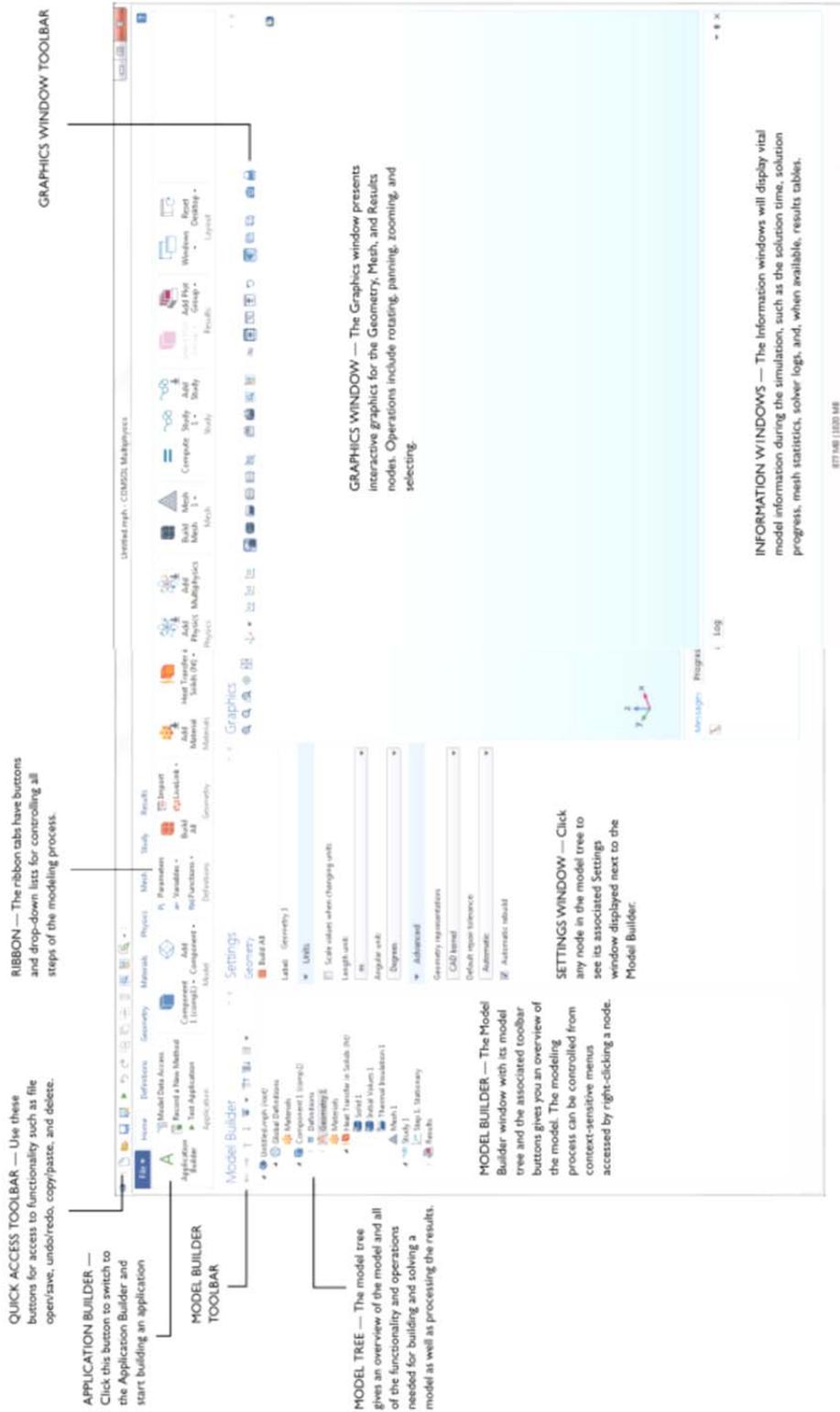


Abbildung 1: Der Comsol Desktop®

The screenshot on the previous pages is what you will see when you first start modeling in COMSOL Multiphysics using the Model Builder. The COMSOL Desktop® user interface provides a complete and integrated environment for physics modeling and simulation as well as application design, providing you with the tools necessary to build a user-friendly interface for your models. You can customize the desktop to your own needs. The windows can be resized, moved, docked, and detached. Any changes you make to the layout will be saved when you close the session and available again the next time you open COMSOL Multiphysics. As you build your model, additional windows and widgets will be added. Among the available windows and user interface components are the following:

Quick Access Toolbar

The Quick Access Toolbar gives access to functionality such as **Open**, **Save**, **Undo**, **Redo**, **Copy**, **Paste**, and **Delete**. You can customize its content from the list (the downward-facing arrow to the right of the toolbar).

Ribbon

The ribbon at the top of the desktop gives access to commands used to complete most modeling tasks. The ribbon is only available in the Windows® version of the COMSOL Desktop environment and is replaced by menus and toolbars in the OS X and Linux® versions. Click the **Application Builder** button to switch from the Model Builder to the Application Builder and start building an application based on your model.

Settings Window

This is the main window for entering all of the specifications of the model, including the dimensions of the geometry, properties of the materials, boundary conditions and initial conditions, and any other information that the solver will need to carry out the simulation. The picture below shows the **Settings** window for the **Geometry** node.

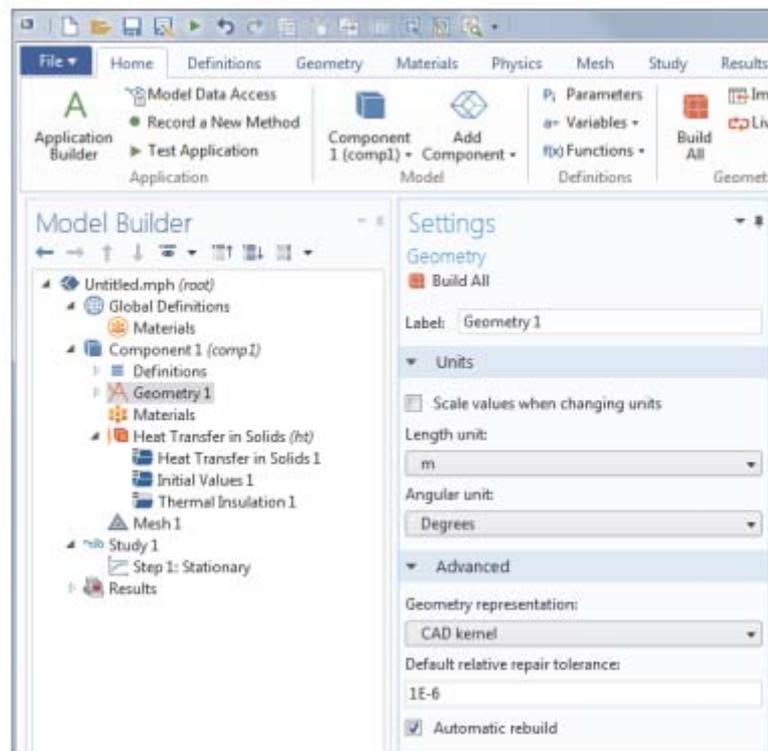


Abbildung 2: Settings window for the Geometry node

Plot Windows

These are the windows for graphical output. In addition to the **Graphics** window, **Plot** windows are used for visualizing results. Several **Plot** windows can be used to show multiple results simultaneously. A special case is the **Convergence Plot** window, an automatically generated **Plot** window that displays a graphical indication of the convergence of the solution process while a model is running.

Information Windows

These are the windows for nongraphical information. They include:

- **Messages:** Various information about the current COMSOL Multiphysics session is displayed in this window.
- **Progress:** Progress information from the solver in addition to stop buttons.
- **Log:** Information from the solver, such as the number of degrees of freedom, solution time, and solver iteration data.
- **Table:** Numerical data in table format as defined in the Results node.
- **External Process:** Provides a control panel for cluster, cloud, and batch jobs.

Other Windows

- **Add Material** and the **Material Browser:** Access the material property libraries. The Material Browser enables editing of material properties.
- **Selection List:** A list of geometry objects, domains, boundaries, edges, and points that are currently available for selection.

The **Windows** drop-down list in the **Home** tab of the ribbon gives you access to all COMSOL Desktop windows. (On OS X and Linux®, you will find this in the **Windows** menu.)

Progress Bar with Cancel Button

The Progress Bar with a button for canceling the current computation, if any, is located in the lower right-hand corner of the COMSOL Desktop interface.

Dynamic Help

The **Help** window provides context-dependent help texts about windows and model tree nodes. If you have the **Help** window open in your desktop (by typing F1, for example), you will get dynamic help (in English only) when you click a node or a window. From the **Help window**, you can search for other topics, such as menu items.

1.1 The Model Builder and the Application Builder

The two main components of the COMSOL Desktop environment are the Model Builder and the Application Builder.

The Model Builder is the tool where you define the model and its components, such as how to solve it, the analysis of results, and creating reports. You do that by building a model tree. The model tree reflects the underlying data structure, the model object, which stores the state of the model including settings for geometry, mesh, physics, boundary conditions, studies, solvers, postprocessing, and visualizations.

The Application Builder allows you to quickly create an application with a specialized user interface that is easy to use. An application is typically based on a model created with the Model Builder. The Application Builder provides two important tools for creating applications: The Form editor and the Method editor. In addition, an application can have a menu bar or a ribbon. The Form editor includes drag-and-drop capabilities to easily access and include user interface components, such as input fields, graphics windows, and buttons. The Method editor is a programming environment that, for example, allows you to modify the model represented by the model object data structure. You can also use the Method editor to add user interface logic and auxiliary functionality to an application. The Java[®] programming language is used to write code in the Method editor, which means that all Java[®] syntax and Java[®] libraries can be used.

This book, *Introduction to COMSOL Multiphysics*, gives a detailed introduction to using the Model Builder and a quick introduction to the Application Builder. For detailed information on how to use the Application Builder, including the Form editor and the Method editor, see *Introduction to Application Builder*.

1.2 Preferences

Preferences are settings that affect the modeling environment. Most are persistent between modeling sessions, but some are saved with the model. You access the preferences from the **File** menu by selecting **Preferences**.

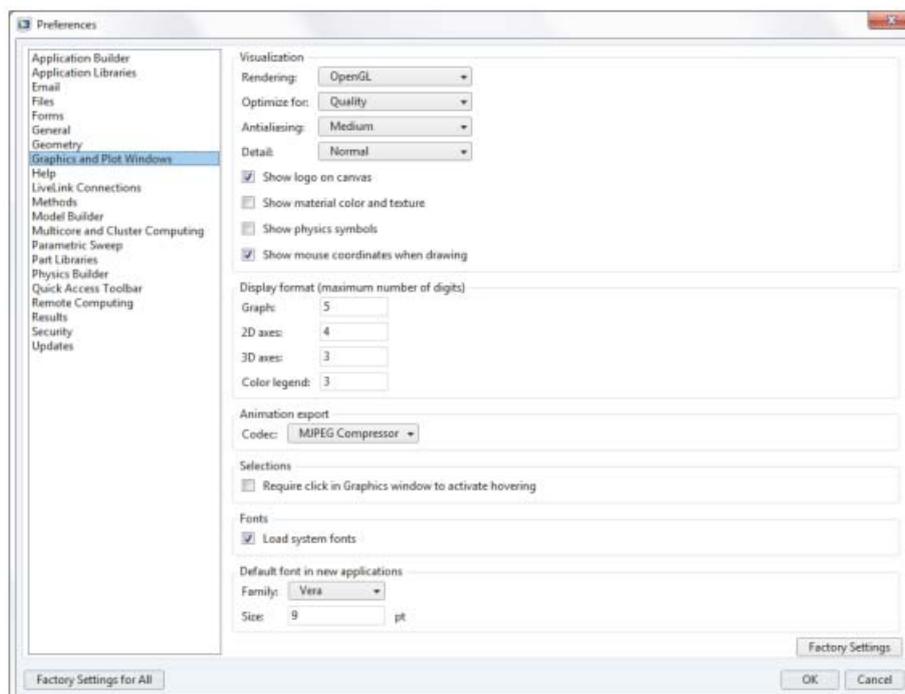


Abbildung 3: Preferences window

In the **Preferences** window, you can change settings such as graphics rendering, the number of displayed digits for results, the maximum number of CPU cores used for computations, or paths to user-defined application libraries. Take a moment to browse your current settings to familiarize yourself with the different options.

1.3 Creating a New Model

You can set up a model guided by the Model Wizard or start from a Blank Model as shown in the figure below.

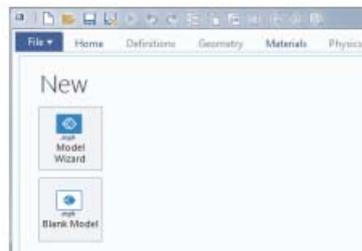


Abbildung 4: New Model window

1.3.1 CREATING A MODEL GUIDED BY THE MODEL WIZARD

The Model Wizard will guide you in setting up the space dimension, physics, and study type in a few steps:

- 1 Start by selecting the space dimension for your model component: **3D**, **2D Axisymmetric**, **2D**, **1D Axisymmetric**, **1D**, or **0D**.

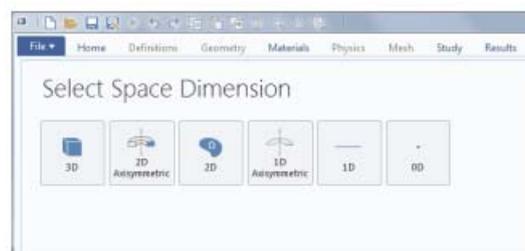


Abbildung 5: Select Space Dimension window

- 2 Now, add one or more physics interfaces. These are organized in a number of physics branches in order to make them easy to locate. These branches do not directly correspond to products. When products are added to your COMSOL Multiphysics installation, one or more branches will be populated with additional physics interfaces.

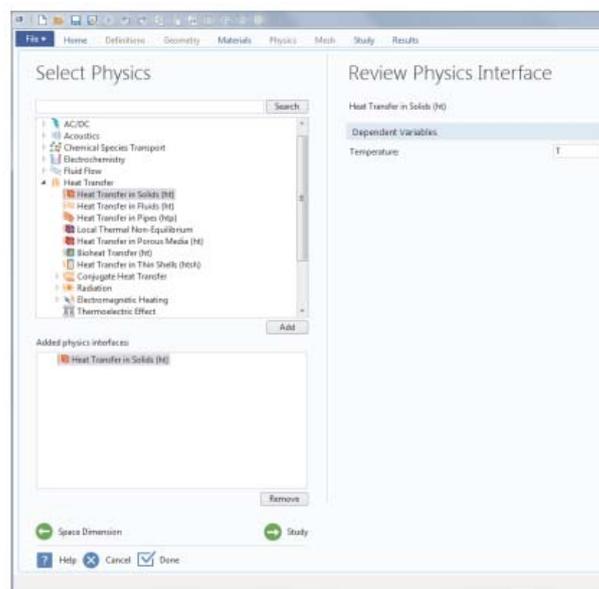


Abbildung 6: Select Physics window

Select the Study type that represents the solver or set of solvers that will be used for the computation.



Abbildung 7: Select Study window

Finally, click **Done**. The desktop is now displayed with the model tree configured according to the choices you made in the Model Wizard.

1.3.2 CREATING A BLANK MODEL

The Blank Model option will open the COMSOL Desktop interface without any Component or Study. You can right-click the model tree to add a Component of a certain space dimension, physics interface, or Study.

1.4 The Ribbon and Quick Access Toolbar

The ribbon tabs in the COMSOL Desktop environment reflect the modeling workflow and give an overview of the functionality available for each modeling step, including building simulation applications from your models.



Abbildung 8: Ribbon tabs

The **Home** tab contains buttons for the most common operations for making changes to a model, running simulations, and for building and testing applications. Examples include changing model parameters for a parameterized geometry, reviewing material properties and physics, building the mesh, running a study, and visualizing the simulation results.

There are standard tabs for each of the main steps in the modeling process. These are ordered from left to right according to the workflow: **Definitions**, **Geometry**, **Materials**, **Physics**, **Mesh**, **Study**, and **Results**.

Contextual tabs are shown only if and when they are needed, such as the **3D Plot Group** tab, which is shown when the corresponding plot group is added or when the node is selected in the model tree.



Abbildung 9: Contextual tab "Temperature"

Modal tabs are used for very specific operations, when other operations in the ribbon may become temporarily irrelevant. An example is the **Work Plane** modal tab. When working with work planes, other tabs are not shown, since they do not present relevant operations.



Abbildung 10: Modal tab "Work plane"

1.4.1 THE RIBBON VS. THE MODEL BUILDER

The ribbon gives quick access to available commands and complements the model tree in the **Model Builder** window. Most of the functionality accessed from the ribbon is also accessible from contextual menus by right-clicking nodes in the model tree. Certain operations are only available from the ribbon, such as selecting which desktop window to display. In the COMSOL Desktop interface for OS X and Linux®, this functionality is available from toolbars, which replace the ribbon on these platforms. There are also operations that are only available from the model tree, such as reordering and disabling nodes.

1.4.2 THE QUICK ACCESS TOOLBAR

The **Quick Access Toolbar** contains a set of commands that are independent of the ribbon tab that is currently displayed. You can customize the **Quick Access Toolbar** and add most commands available in the **File** menu, including commands for undoing and redoing recent actions, as well as for copying, pasting, duplicating, and deleting nodes in the model tree. You can also choose to position the **Quick Access Toolbar** above or below the ribbon.

1.5 The Model Builder and the Model Tree

Using the Model Builder, you build a model by starting with the default model tree, adding nodes, and editing the node settings.

All of the nodes in the default model tree are top-level parent nodes. You can right-click on them to see a list of child nodes, or subnodes, that you can add beneath them. This is the means by which nodes are added to the tree.

When you click on a child node, you will see its node settings in the **Settings** window. It is here that you can edit node settings.

It is worth noting that if you have the **Help** window open, which is achieved either by selecting **Help** from the **File** menu or by pressing the function key F1, then you will also get dynamic help (in English only) when you click on a node.

1.5.1 THE ROOT, GLOBAL DEFINITIONS, AND RESULTS NODES

A model tree always has a root node (initially labeled **Untitled.mph**), a **Global Definitions** node, and a **Results** node. The label on the root node is the name of the multiphysics model file, or MPH file, to which the model is saved. The root node has settings for author name, default unit system, and more.

The **Global Definitions** node has a **Materials** subnode by default. The **Global Definitions** node is where you define parameters,

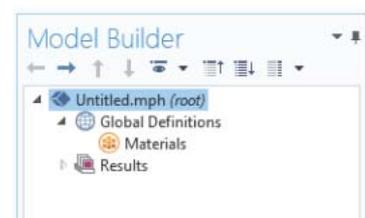


Abbildung 11: Default nodes and subnodes

variables, functions, and couplings that can be used throughout the model tree. They can be used, for example, to define the values and functional dependencies of material properties, forces, geometry, and other relevant features. The **Global Definitions** node itself has no settings, but its child nodes have plenty of them. The **Materials** subnode stores material properties that can be referenced in the **Component** nodes of a model.

The **Results** node is where you access the solution after performing a simulation and where you find tools for processing the data. The **Results** node initially has five subnodes:

- **Data Sets**, which contains a list of solutions you can work with.
- **Derived Values**, which defines values to be derived from the solution using a number of postprocessing tools.
- **Tables**, which is a convenient destination for the **Derived Values** or for **Results** generated by probes that monitor the solution in real-time while the simulation is running.
- **Export**, which defines numerical data, images, and animations to be exported to files.
- **Reports**, which contains automatically generated or custom reports about the model in HTML or Microsoft® Word format.

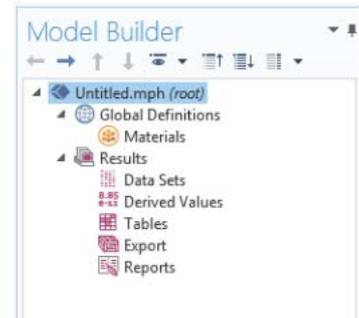


Abbildung 12: Result nodes with subnodes

To these five default subnodes, you may also add more **Plot Group** subnodes that define graphs to be displayed in the **Graphics** window or in **Plot** windows. Some of these may be created automatically, depending on the type of simulations you are performing, but you may include additional figures by right-clicking on the **Results** node and choosing from the list of plot types.

1.5.2 THE COMPONENT AND STUDY NODES

In addition to the three nodes just described, there are two additional top-level node types:

Component nodes and **Study** nodes. These are usually created by the Model Wizard when you create a new model. After using the Model Wizard to specify what type of physics you are modeling and what type of **Study** (e.g., steady-state, time-dependent, frequency-domain, or eigenfrequency analysis) you will carry out, the Model Wizard automatically creates one node of each type and shows you their contents.

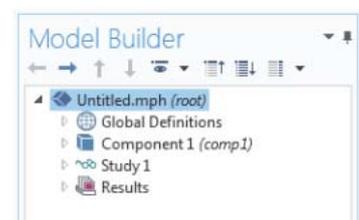


Abbildung 13: Component and Study node

It is also possible to add more **Component** and **Study** nodes as you develop the model. A model can contain multiple **Component** and **Study** nodes and it would be confusing if they all had the same name. Therefore, these types of nodes can be renamed to be descriptive of their individual purposes.

If a model has multiple **Component** nodes, they can be coupled to form a more sophisticated sequence of simulation steps.

Note that each **Study** node may carry out a different type of computation, so each one has a separate Compute button = .

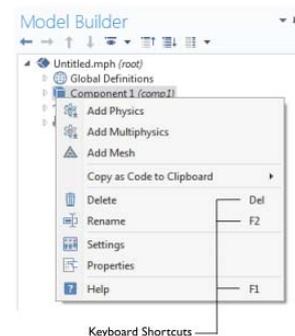


Abbildung 14: Renaming nodes

To be more specific, suppose that you build a model that simulates a coil assembly that is made up of two parts, a coil and a coil housing. You can create two **Component** nodes, one that models the coil and the other the coil housing. You can then rename each of the nodes with the name of the object. Similarly, you can also create two **Study** nodes, the first simulating the

stationary or steady-state behavior of the assembly, and the second simulating the frequency response. You can rename these two nodes to be **Stationary** and **Frequency Domain**. When the model is complete, save it to a file named Coil Assembly.mph. At that point, the model tree in the Model Builder looks like the figure below.

In this figure, the root node is named Coil Assembly.mph, indicating the file in which the model is saved. The **Global Definitions** node and the **Results** node each have their default name. Additionally, there are two **Component** nodes and two **Study** nodes with the names chosen in the previous paragraph.

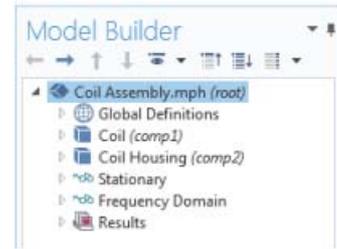


Abbildung 15: Coil Assembly example

1.6 Workflow and Sequence of Operations

In the **Model Builder** window, every step of the modeling process, from defining global variables to the final report of results, is displayed in the model tree.

From top to bottom, the model tree defines an orderly sequence of operations.

In the following branches of the model tree, the node order makes a difference and you can change the sequence of operations by moving the subnodes up or down the model tree:

- Geometry
- Materials
- Physics
- Mesh
- Study
- Plot Groups

In the **Component > Definitions** branch of the tree, the ordering of the following node types also makes a difference:

- Perfectly Matched Layer
- Infinite Elements

Nodes may be reordered by these methods:

- Drag-and-drop
- Right-clicking the node and selecting Move Up or Move Down
- Pressing Ctrl + Up arrow or Ctrl + Down arrow

In other branches, the ordering of nodes is not significant with respect to the sequence of operations, but some nodes can be reordered for readability. Child nodes to **Global Definitions** is one such example.

You can view the sequence of operations presented as program code statements by saving the model as a **Model File for MATLAB®** or as a **Model File for Java®** after having selected

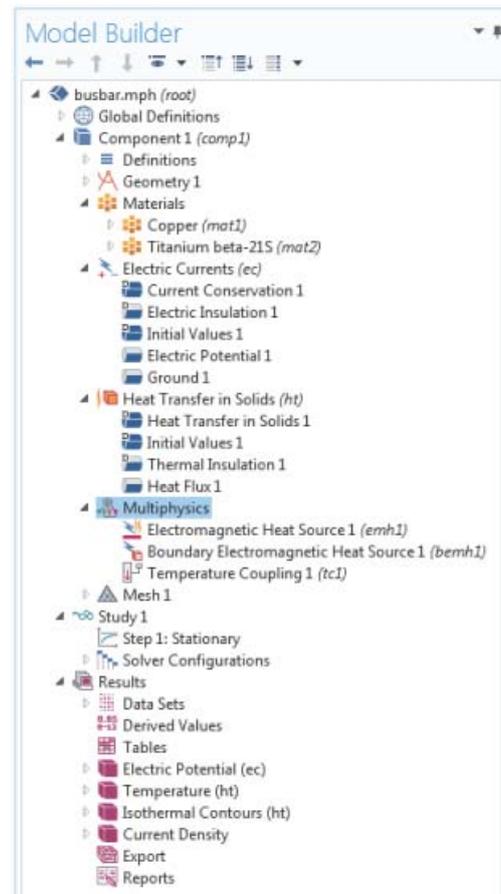


Abbildung 16: Model tree

Compact History in the **File** menu. Note that the model history keeps a complete record of the changes you make to a model as you build it. As such, it includes all of your corrections, including changes to parameters and boundary conditions and modifications of solver methods. Compacting this history removes all of the overridden changes and leaves a clean copy of the most recent form of the model steps. In the Application Builder, you can use the **Record a New Method** option to view and edit program code statements in the Method editor.

As you work with the COMSOL Desktop interface and the Model Builder, you will grow to appreciate the organized and streamlined approach. However, any description of a user interface is inadequate until you try it for yourself.

2. 2D-Balkonplatte

2.1 2D-Aufgabenstellung

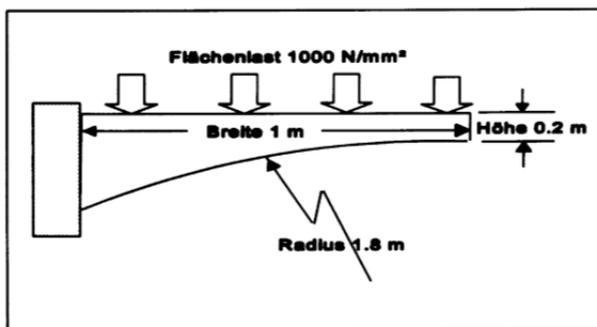


Abbildung 17: Skizze der 2D-Balkonplatte

Die zu berechnende Struktur stellt eine etwa 2 m breite Platte dar, die mit einem Balkon vergleichbar ist. Die Platte ist an einer Seite (an der Hauswand) fest eingespannt und ragt 1 m nach außen. Die Plattendicke beträgt am freien Außenrand 0.2 m. Die untere Seite ist gerundet, sie wird von der Außenkante zur Einspannung hin dicker. Der Radius dieser Rundung beträgt 1.8 m. Die Platte ist an der Oberseite durch eine Verkehrslast beaufschlagt, die als Flächenlast (Druck) einzugeben ist.

2.2 2D-Idealisierung

Die Aufgabe wird mit einer statischen strukturmechanischen Berechnung gelöst. Die Struktur wird durch ein 2-dimensionales Modell abgebildet. Dazu wird ein Elementtyp verwendet, der in einer Ebene definiert ist. Für diesen Elementtyp wird ein **ebener Dehnungszustand** festgelegt. Dies entspricht einem in der Mitte herausgeschnittenen Streifen der Platte, die Einwirkungen der Plattenränder werden vernachlässigt.

2.3 Start des Programms COMSOL Multiphysics

Beim Start des Programms COMSOL Multiphysics öffnet sich das Fenster zum Erstellen eines neuen Modells (vgl. Abbildung 4). Hier wählen Sie aus, ob der Modell-Assistent verwendet oder mit einem leeren Modell begonnen werden soll. Nach der Wahl des Modell-Assistenten wird im nächsten Fenster die Raumdimension 2D ausgewählt.

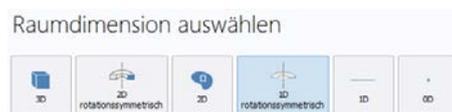


Abbildung 18: Auswahl der Raumdimension

Anschließend legen Sie fest, dass es sich um ein strukturmechanisches Modell unter Verwendung der Festkörpermechanik (solid) handelt.

Abschließend geben Sie bei der Auswahl der Studie an, dass bei der Simulation eine stationäre Analyse durchgeführt werden soll.

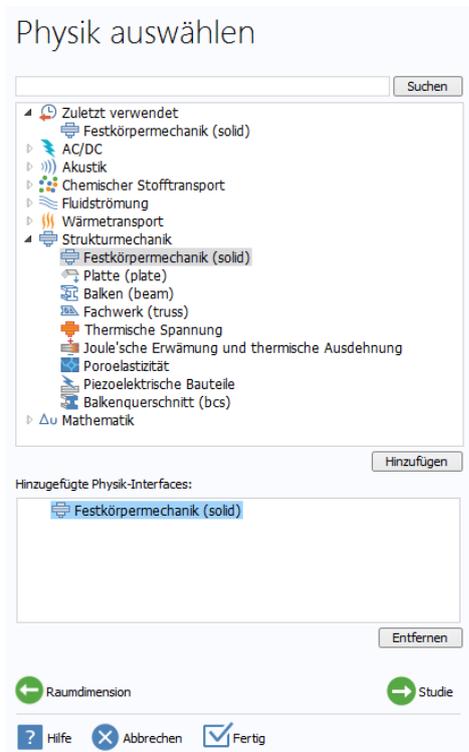


Abbildung 18: Auswahl von Festkörpermechanik

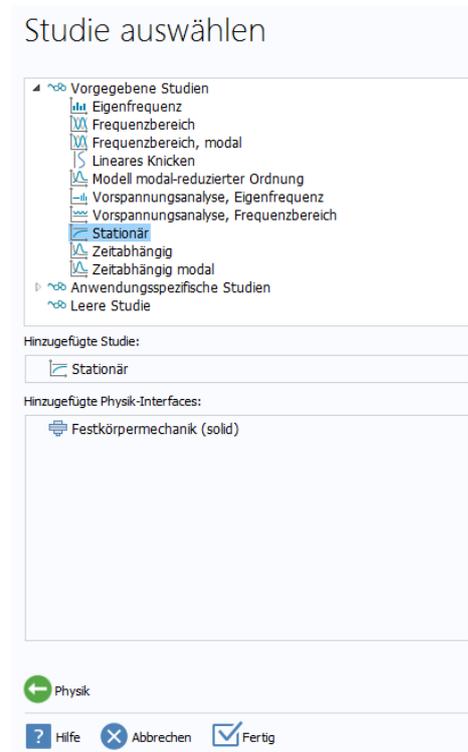


Abbildung 19: Auswahl einer stationären Analyse

Schließen Sie die Modellerstellung durch Betätigen des **Fertig**-Buttons ab.

Sie erhalten folgende Darstellung des Home-Tabs:

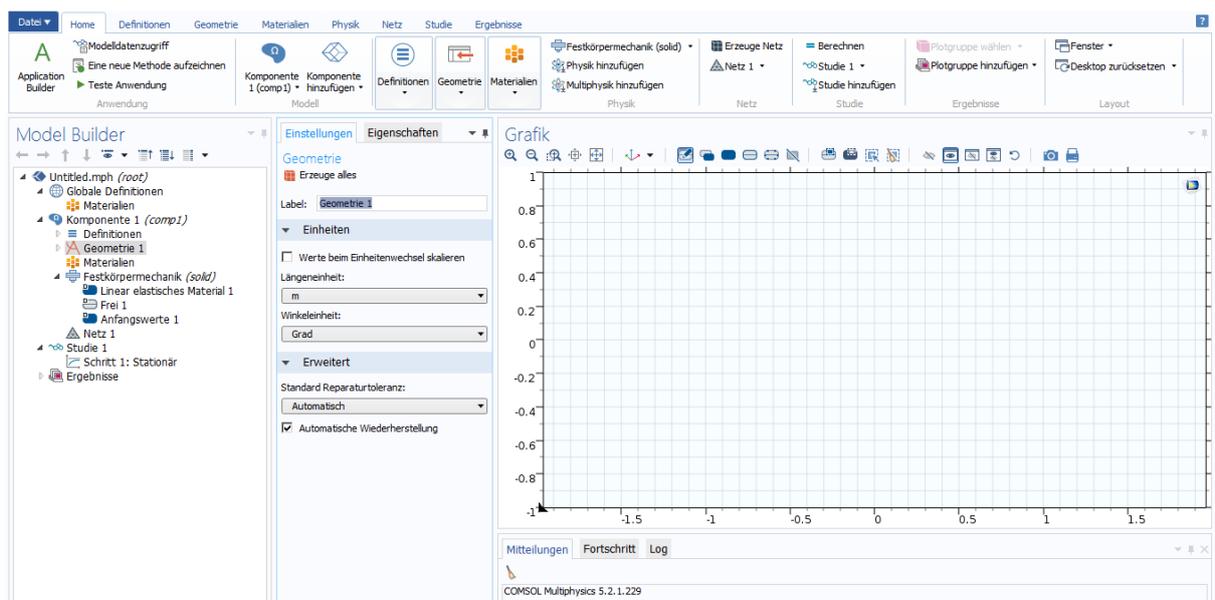


Abbildung 19: Home-Tab des erzeugten Modells

2.4 Preprocessing (2D)

Dieser Abschnitt geht davon aus, dass die Aufgabenstellung bekannt ist und durch die Überlegungen der Idealisierung soweit aufbereitet ist, dass die numerische Arbeit beginnen kann.

COMSOL Multiphysics ist gestartet und das Anwendungsfenster hat sich geöffnet.

Die komplette Finite-Element-Berechnung umfasst folgende Schritte:

- Zeichnen oder importieren der Geometrie
- Definition der Gebietseigenschaften sowie der Rand- und Punktbedingungen
- Vernetzung der Geometrie
- Lösen des Modells
- Postprocessing der Lösung

Im Preprocessing-Schritt werden die Modelldaten aufbereitet. Diese Modelldaten beinhalten

- die Knoten und Elemente
- den Elementtyp
- die Materialdaten
- in einigen Fällen zusätzlich Querschnittsdaten

Im Preprocessing werden die Knoten und Elemente vielfach automatisch vom Programm erzeugt, der Anwender gibt nur ein Geometriemodell als Umriss vor. Alle Knoten, Elemente, Materialdaten und gegebenenfalls Querschnittsdaten werden benötigt, um anschließend im Lösungsschritt des Multiphysics-Programms die Steifigkeitsmatrix erstellen zu lassen. Das Preprocessing kann beendet werden, wenn Knoten, Elemente, Elementtyp, Materialdaten und gegebenenfalls Querschnittsdaten festgelegt sind und damit das Finite-Element-Berechnungsmodell das numerische Abbild unserer Struktur darstellt.

2.4.1 2D-Geometriemodellierung

Das Multiphysics-Programm bietet umfassende Möglichkeiten zur Festlegung der Knoten und Elemente des Finite-Element-Modells, die es ermöglichen, das FE-Modell einer Konstruktion in einfacher Weise zu erstellen. Es sind zwei Arbeitsweisen verfügbar - die Geometriemodellierung (Solid Modeling) und anschließende automatische Vernetzung oder die direkte Eingabe einzelner Knoten und Elemente. Beide Arbeitsweisen haben ihre Vorteile, der Anwender kann zwischen beiden wählen und sie beliebig kombinieren.

Bei der **Geometriemodellierung (Solid Modeling)** erfolgt die Definition der Geometrie und auch später der Randbedingungen von der Erzeugung des Finite-Element-Netzes (der Knoten und Elemente) weitgehend unabhängig. Zuerst gibt der Benutzer die Geometrie des Körpers (im Allgemeinen die Umrisse) ein. Die Eingaben können sofort und interaktiv überprüft werden. Dieses Modell wird dann vom Programm vernetzt, d. h. das Programm legt die Lage der Knoten und die Zuordnung der Knoten zu den Elementen fest. Bei einer Änderung des Geometriemodells kann eine angemessene Elementeinteilung vom Multiphysics-Programm in kurzer Zeit mit wenig Aufwand neu festgelegt werden.

Es gibt zwei Möglichkeiten der Geometriemodellierung: Die sogenannte „**top-down**“ und die „**bottom-up**“ Vorgehensweise. Bei der ersten Vorgehensweise „**top-down**“ wird von einfachen

geometrischen Körpern wie Quader, Kegel, Zylinder oder Kugeln - sogenannte „**primitives**“ - ausgegangen, die mit einem einzigen Befehl erstellt werden. Definiert der Anwender ein Volumen, werden vom Programm automatisch die dazugehörigen Flächen, Linien und Punkte erzeugt. Bei der zweiten Vorgehensweise „bottom-up“ geht der Benutzer von Punkten aus, verbindet diese mit Linien, spannt mit diesen dann Flächen auf, die wiederum Volumen erzeugen können. Beide Vorgehensweisen haben ihre Vorteile. Das Multiphysics-Programm ist auf die „top-down“-Methode beschränkt.

Bei beiden Vorgehensweisen stehen dem Anwender **Boole'sche Operationen** wie Verschneidungen, Subtraktion und Addition zur Verfügung. Diese sind auf Linien, Flächen und Volumen anwendbar, so dass in kurzer Zeit komplexe Modelle erstellt werden können.

Wenn das Geometriemodell einmal erstellt ist, kann das Finite-Element-Modell (Knoten und Elemente) mit einem einzigen Befehl generiert werden. Das Multiphysics-Programm bietet zwei Arten der Vernetzung: „**mapped meshing**“ und „**free meshing**“. Unter „mapped meshing“ versteht man das regelmäßige Vernetzen mit Vierecken bzw. Hexaedern. Im „free meshing“ bestehen hinsichtlich der Vernetzung keine festen Vorgaben. Der Multiphysics-Netzgenerator erzeugt automatisch ein angepasstes Muster von Knoten und Elementen.

In unserem Beispiel wird zunächst mit den angebotenen Standardgeometrien (**primitives**) ein **Quadrat** erzeugt, anschließend ein **Kreis** und dann der Kreis vom Quadrat durch eine **Boole'sche Operation** subtrahiert, so dass die Rechteckfläche mit einem Bogenausschnitt übrigbleibt. Diese Fläche wird automatisch vernetzt.

Das Quadrat

Zur Erzeugung des Quadrates wird der Geometrie-Knoten im Model Builder markiert und im Kontextmenu (rechter Mausklick) das Quadrat ausgewählt.

Geometrie-Knoten > Kontextmenu > Quadrat

Das Einstellungs-Fenster mit der Titelzeile **Quadrat** lädt zur Eingabe der Breite sowie zur Definition des Drehwinkels und der Basis mit den entsprechenden Koordinaten ein. Unter Objekttyp wird festgelegt, ob es sich um einen Festkörper oder eine Kurve handelt. Im Feld Label ist die Benennung der Geometrie möglich.

Unser Quadrat soll eine Kantenlänge von 1 erhalten. Dazu geben wir mit der Tastatur den Wert 1 in das Feld **Seitenlänge** ein. Alle weiteren Voreinstellungen können unverändert übernommen werden. Das Quadrat wird anschließend durch Betätigen von **Erzeuge ausgewählte** oder der Funktionstaste F7 erzeugt.

Das Quadrat ist im Grafik-Fenster dargestellt und automatisch so skaliert, dass der quadratische Bildbereich gut ausgenutzt wird.

Bevorzugen Sie die grafische Erstellung der Geometrie aktivieren Sie im **Geometrie-Tab** aus der **Rechteck-Liste** z. B. das **Quadrat** mit dem Basispunkt links unten. Platzieren Sie das Fadenkreuz auf die Koordinaten 0,0 und betätigen Sie die linke Maustaste. Ziehen Sie nun ein Quadrat mit der Kantenlänge 1 auf indem Sie das Fadenkreuz auf die Koordinaten 1,1 verschieben und die Erstellung durch Drücken der linken Maustaste abschließen. Im Einstellungs-Fenster Quadrat wird anschließend der Objekttyp Festkörper ausgewählt und die Quadrat-Erstellung durch Betätigen von **Erzeuge ausgewählte** abgeschlossen. Eine grafische Anpassung an den Zeichenbereich kann bei Bedarf durch Drücken des „Auf Gesamtumfang zoomen“-Buttons in der Werkzeugleiste des Grafik-Fensters erreichen werden.

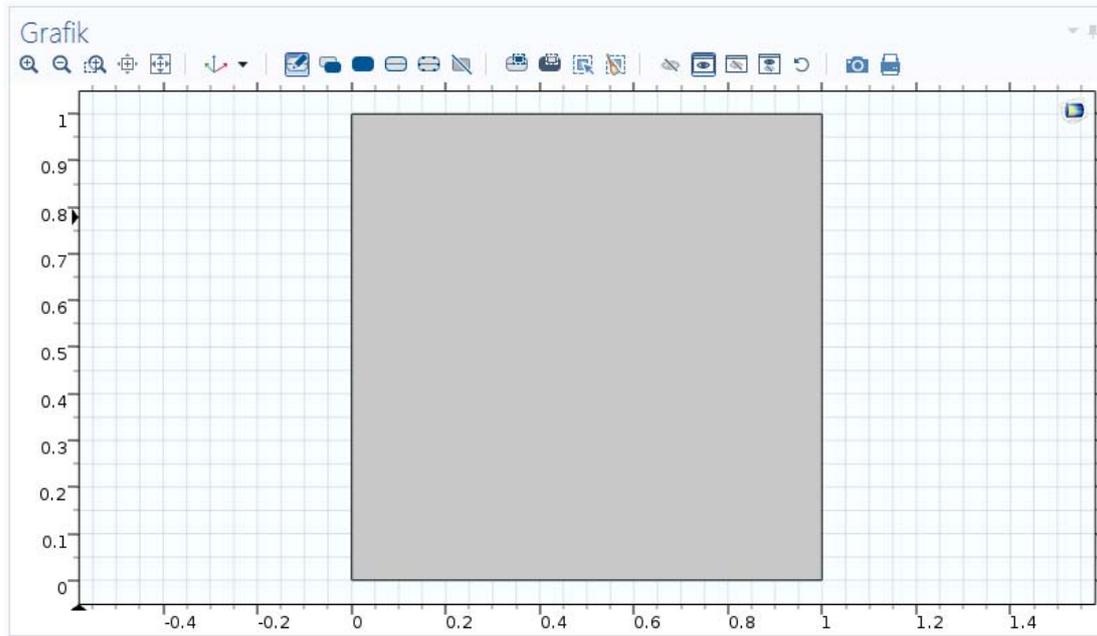


Abbildung 20: Grafik-Fenster mit erzeugtem Quadrat

Der Kreis

Für die Festlegung des Kreises, der die Grundlage für den Ausschnitt darstellen soll, wird der Geometrie-Knoten im Model Builder markiert und im Kontextmenu der Kreis ausgewählt.

Geometrie-Knoten > Kontextmenu > Kreis

Durch diese Auswahl wird das Einstellungs-Fenster mit der Titelzeile **Kreis** geöffnet. Hier wird unter **Größe und Form** der **Radius** von **1.8** eingegeben und bei **Position** der **Kreismittelpunkt** an den Koordinaten **x: 1** und **y: -1** festgelegt. Der Kreis wird anschließend durch Betätigen von **Erzeuge ausgewählte** oder der Funktionstaste **F7** erzeugt.

Die grafische Darstellung wird nun an die Abmessungen unserer Geometrie durch Anklicken des „Auf Gesamtumfang zoomen“-Button in der Werkzeugleiste des Grafik-Fensters angepasst.

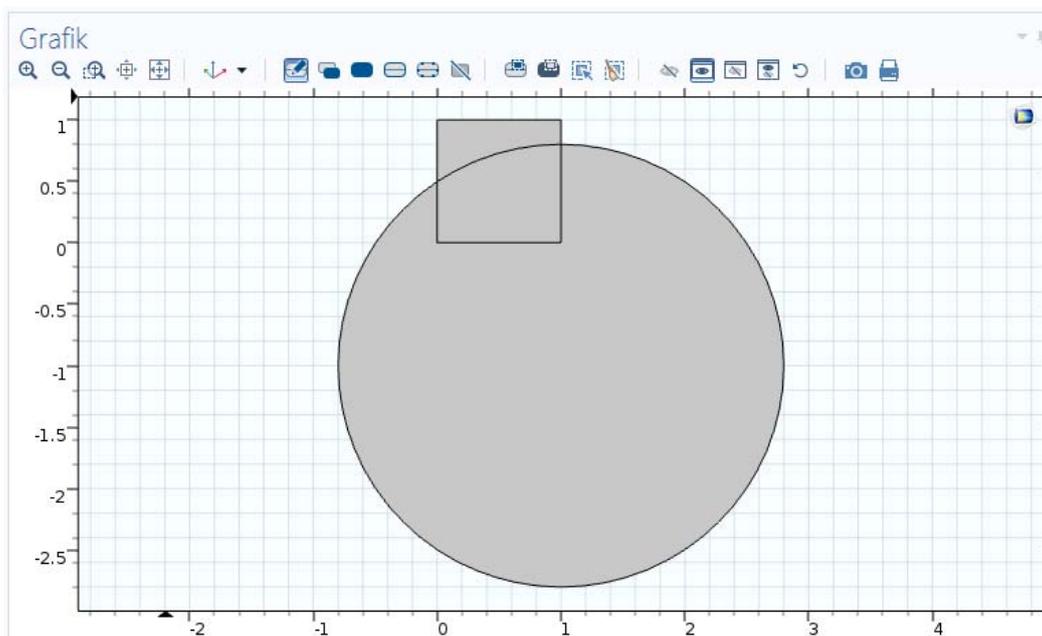


Abbildung 21: Grafik-Fenster mit dem erzeugten Kreis

Die Boole'sche Operation

Die von uns gewünschte Fläche ist diejenige des Quadrates, jedoch abzüglich des Teils der Kreisfläche, der in das Quadrat hineinragt. Wir werden dieses Abziehen der Flächen als eine Boole'sche Operation ausführen. Dabei wird von der Quadratfläche der Kreis subtrahiert. Die von uns gewünschte Fläche ist das, was vom Quadrat anschließend übrig bleibt.

Diese Operation wird eingeleitet, indem der Geometrie-Knoten im Model Builder markiert und im Kontextmenu aus der Liste **Boole'sche Operationen und Partitionen** die **Differenz** ausgewählt wird.

Geometrie-Knoten > Kontextmenu > Bool'sche Operationen und Partitionen > Differenz

Es erscheint das Einstellungs-Fenster mit der Titelzeile **Kreis**. Hier wird unter **Differenz** bei **Hinzufügende Objekte** das Quadrat und bei **Voneinander abzuziehende Objekte** der Kreis ausgewählt.

Die Boole'sche Subtraktion wird durch Betätigen von **Erzeuge ausgewählte** oder der Funktionstaste **F7** ausgeführt. Es erscheint im Grafik-Fenster der gewünschte Umriss des Quadrates mit dem ausgeschnittenen Bogen an der Unterseite. Passen Sie danach die grafische Darstellung der Geometrie an.

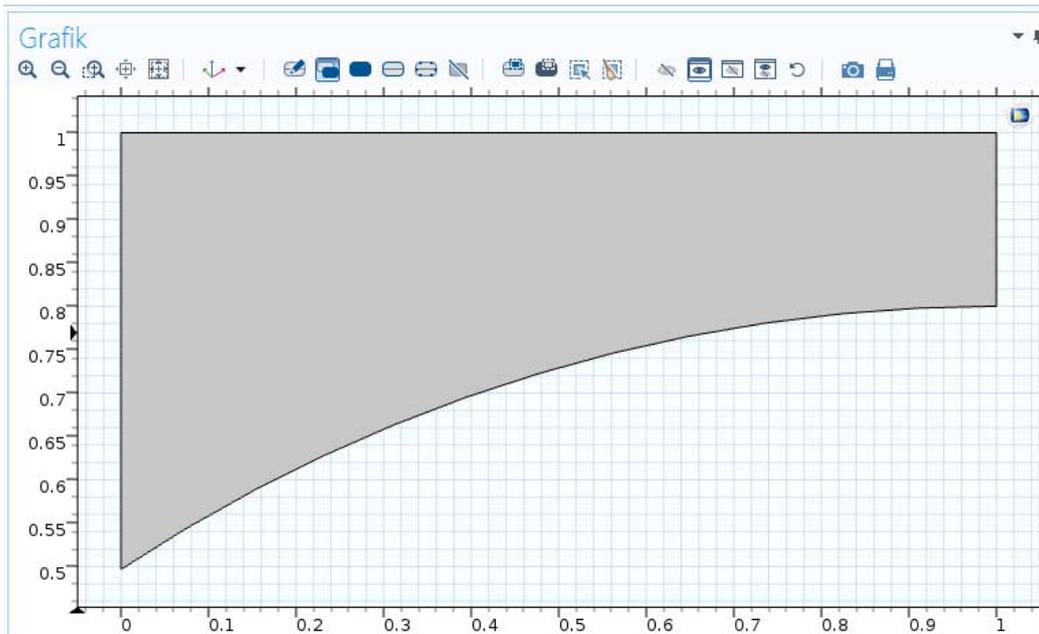


Abbildung 22: Grafik-Fenster mit resultierender Fläche

2.4.2 Der Elementtyp

Nachdem das Geometriemodell fertiggestellt ist und die Fläche, die das rechnerische Modell der Struktur repräsentiert, auf dem Bildschirm dargestellt ist, kann nun in diese Fläche ein Netz von Elementen und Knoten einbeschrieben werden. Dies soll automatisch erfolgen. Diese Automatik erfordert jedoch vorher noch eine Angabe über den Elementtyp. Denn wenn auch durch unser Modell bereits klargestellt ist, dass es sich um ein flaches, ebenes Gebilde handelt, bleiben noch viele Entscheidungen offen, zum Beispiel

- soll eine strukturmechanische Berechnung (mit Verschiebungen und Spannungen) oder eine Temperaturfeldberechnung (mit Temperaturen und Wärmeströmen) oder eine fluiddynamische Berechnung (mit Drücken und Strömungsgeschwindigkeiten) durchgeführt werden?

- soll das Modell ein 2-dimensionaler Schnitt durch eine 3-dimensional ausgedehnte Platte sein (wie in diesem Beispiel), bei der aber in der Tiefenrichtung (bei uns senkrecht zum Bildschirm) keine Änderungen auftreten und wir uns daher auf die dargestellte Ebene beschränken können? Oder liegt ein flaches, dünnes Blech vor, das sich in die z-Richtung hinein verbiegen kann (3-dimensionales Schalenmodell)?

Dies sind zwar nicht viele, aber wichtige Fragen, die wir bereits zu Beginn des Beispiels durch die Auswahl des entsprechenden Anwendungsmodus beantwortet haben.

2.4.3 Die Materialdaten

Zur Eingabe der Materialdaten wird der **Material-Knoten** der **Komponente 1** im Model Builder markiert und im Kontextmenu **Leeres Material** ausgewählt.

Geometrie-Knoten > Kontextmenu > Leeres Material

Diese Auswahl öffnet das Einstellungs-Fenster mit der Titelzeile **Material**. Das Gebiet Nummer 1 ist bereits ausgewählt und die Kennwerte des Materials können im Bereich **Materialinhalt** eingetragen werden. Dazu klicken Sie auf den Doppelpfeil  und geben die Werte in den entsprechenden Feldern ein.

Für unser Beispiel ist es ausreichend, für das **Elastizitätsmodul E** den Zahlenwert von **200e9** und für die Querkontraktion die **Poissonzahl nu** mit **0.3** einzutragen.

Im nächsten Schritt werden die äußeren Einflüsse auf unsere Struktur (die Randbedingungen und Kräfte bzw. Momente) festgelegt.

2.4.4 Die 2D-Randbedingungen

Für die Festhaltung am linken Rand des Modells wird der **Festkörpermechanik-Knoten** im Model Builder markiert und im Kontextmenu **Festlager** ausgewählt.

Festkörpermechanik-Knoten > Kontextmenu > Festlager

Dadurch wird das Einstellungs-Fenster mit der Titelzeile **Festlager** geöffnet. Wählen Sie im Grafik-Fenster den linken Rand aus und Bestätigen Sie dies durch einen Linksklick. Der **Rand 1** wird im Bereich **Randauswahl** übernommen. Im Grafik-Fenster wird der festgehaltene Rand blau gekennzeichnet.

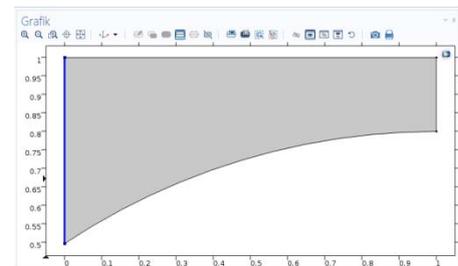


Abbildung 23: Markierter Festlager-Rand

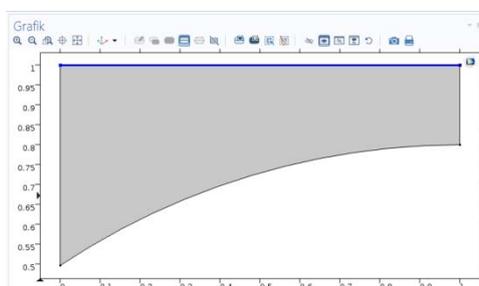


Abbildung 24: Markierter Oberflächenlast-Rand

Zum Aufbringen der Drucklast am oberen Rand des Modells wählen Sie im Kontextmenu des **Festkörpermechanik-Knotens** den Eintrag **Rand- oder Oberflächenlast** aus. Es öffnet sich das Einstellungs-Fenster mit der Titelzeile **Rand- oder Oberflächenlast**. Markieren Sie im Grafik-Fenster den oberen Rand und Bestätigen Sie dies durch einen Linksklick. Der **Rand 2** wird im Bereich **Randauswahl** übernommen. Danach stellen Sie unter **Kraft** den **Lasttyp: Last, definiert als Kraft pro Einheitsfläche** ein und geben in das Feld für die **y-Richtung** den Wert **-1000** ein. Im Grafikfenster wird der druckbelastete Rand blau gekennzeichnet.

Zu dieser Vorgehensweise eine verteilte Last aufzubringen, werden hier noch zusätzliche Hinweise gegeben. Diese Hinweise betreffen gleichermaßen ein 2-dimensionales Modell, wie im

vorliegenden Fall, oder ein 3-dimensionales Modell, wie es in anderen Beispielen verwendet werden wird. Die Hinweise werden für beide Fälle hier aufgeführt, wobei die in Klammern aufgeführten Begriffe für das 3-dimensionale Modell zutreffen.

Eine verteilte Last, wie die Drucklast in diesem Beispiel, ist grundsätzlich auf eine Elementkante (im 3-dimensionalen Modell eine Elementrandfläche) aufzubringen. Der Zahlenwert der Last wird als Drucklast bzw. als Kraft pro Fläche erwartet, wobei bei unserem 2-dimensionalen Modell in der Tiefenrichtung eine Längeneinheit zugrunde liegt. Je nach Modellerstellung kann die Festlegung der gewünschten Elementkanten (Elementflächen) auf verschiedene Weise erfolgen.

- a) Es können die Elemente und jeweils die zutreffende Kante (Fläche) herausgesucht werden. Vorteil dieser Vorgehensweise: die Lastaufbringung ist sehr gezielt möglich und diese Vorgehensweise ist auch bei direkter Modellgenerierung verwendbar. Nachteil dieser Vorgehensweise: bei vielen Elementen oder freier Vernetzung ist es illusorisch, per Anklicken oder Nummerneingabe alle Elemente und die zutreffenden Kanten (Flächen) festzulegen, und bei einer Änderung der Vernetzung ergeben sich andere Elemente, die herausgesucht werden müssen. Fazit: diese Vorgehensweise ist nur für akademische Modelle empfehlenswert.
- b) Es können diejenigen Knoten herausgesucht werden, die die Elementkanten (Elementflächen) aufspannen, die belastet werden sollen. Damit werden Knoten vom Anwender ausgesucht, vom Multiphysics-Programm die entsprechenden Elementkanten (Elementflächen) herausgesucht und der gegebene Wert als Drucklast auf die Kante (Fläche) aufgebracht. Vorteil: die Knoten, die den Rand (die Oberfläche) darstellen, sind einfach zu selektieren, und diese Vorgehensweise ist auch bei direkter Modell-generierung verwendbar. Nachteil: bei einer Änderung der Vernetzung ergeben sich andere Knoten, die herausgesucht werden müssen. Fazit: diese Vorgehensweise ist nur für solche Modelle empfehlenswert, die nicht später eventuell neu vernetzt werden.
- c) Wenn die Geometriemodellierung verwendet wurde, können diejenigen Linien, also „lines“ (Flächen, also „areas“) festgelegt werden, die durch den Druck belastet sind. Dann werden vom Multiphysics-Programm später die entsprechenden Elementkanten (Elementflächen) herausgesucht, die zu diesen Linien (Flächen) gehören und der gegebene Wert als Drucklast auf die Kante (Fläche) jedes zugehörigen Elementes aufgebracht. Vorteil: die Linien (Flächen), die den Rand (die Oberfläche) darstellen, sind einfach zu selektieren, und bei einer Änderung des automatisch erzeugten Netzes verbleiben die Lasten an der gewünschten Kante (Oberfläche). Nachteil: die Übertragung der Lasten auf die Kanten (Flächen) der zugehörigen Elemente wird automatisch direkt vor der Lösung durchgeführt. Fazit: diese Vorgehensweise ist für solche Modelle empfehlenswert, die mit der Geometriemodellierung erstellt wurden und auch später eventuell neu vernetzt werden.

Im vorliegenden Fall wurde die Vorgehensweise c) gewählt und damit diejenigen Linien festgelegt, die mit der Drucklast zu beaufschlagen sind.

2.4.5 Das Vernetzen

Das Geometriemodell wird nun automatisch mit einem Netz von Knoten und Elementen versehen. In diesem Beispiel soll festgelegt werden, dass ausschließlich Viereck-Elemente zu bilden sind, und ein Netz von 10 mal 10 Elementen erstellt werden soll (strukturiert / mapped meshing).

Dazu wird der **Netz-Knoten** im Model Builder markiert und im Kontextmenu **Strukturiert** ausgewählt. Direkt anschließend wird der neue Unter-Knoten **Strukturiert** markiert und aus dessen Kontextmenu **Verteilung** gewählt.

Netz-Knoten > Kontextmenu > Strukturiert

Strukturiert > Kontextmenu > Verteilung

Es zeigt sich das Einstellungs-Fenster mit dem Titel **Verteilung**. Wählen Sie im Grafik-Fenster nacheinander den linken Rand und den oberen Rand aus und Bestätigen Sie dies jeweils mit einem Linksklick. Die **Ränder 1** und **2** werden in die **Randauswahl** übernommen. Danach stellen Sie im Bereich **Verteilung** als **Verteilungseigenschaften: Feste Anzahl von Elementen** ein und geben als Anzahl der Elemente den Wert **10** ein.

Die regelmäßige Vernetzung der Geometrie wird durch **Erzeuge ausgewählte** gestartet und die erzeugten Elemente automatisch im Grafik-Fenster dargestellt.

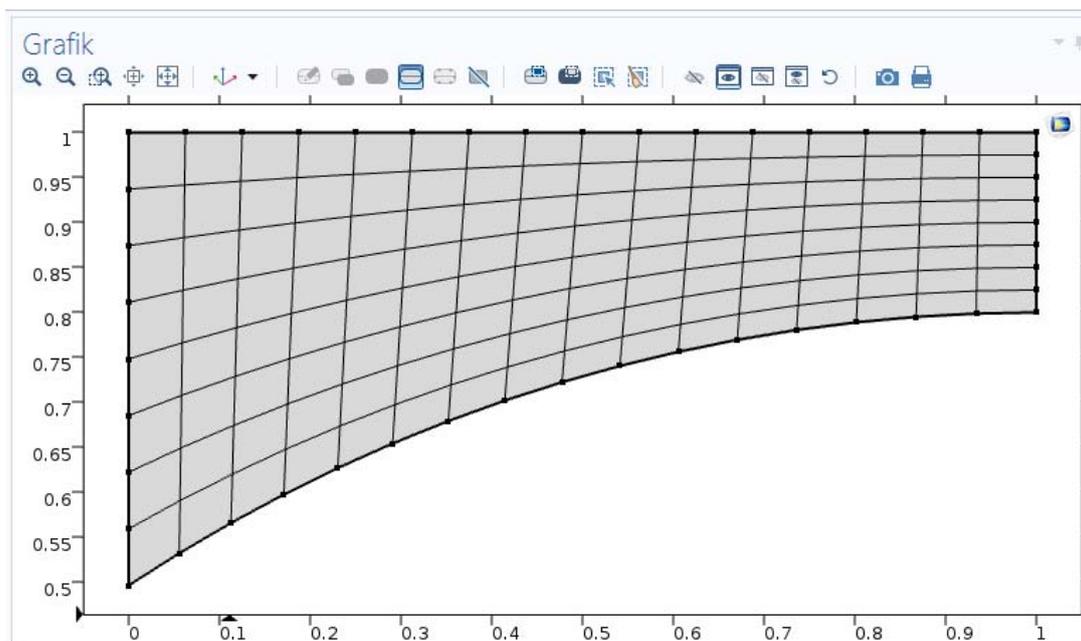


Abbildung 25: Strukturierte 2D-Vernetzung mit 10 mal 10 Elementen

Alle Schritte des Preprocessing sind nun durchgeführt.

2.5 Die Berechnung des 2D-Lastfalles

Für die Berechnung des Lastfalles wird der **Studie-Knoten** markiert und im Kontextmenu **Berechnen** ausgewählt. Alternativen: Im Einstellungs-Fenster mit dem Titel **Studie** auf die Schaltfläche **Berechnen** klicken. Die Schaltfläche **Berechnen** im **Home-Tab** oder im **Studie-Tab** betätigen.

Studie-Knoten > Kontextmenu > Berechnen

Nach Abschluss der Berechnung wird automatisch eine Lösung im Grafik-Fenster dargestellt. Zusätzlich hat der **Ergebnis-Knoten** einen neuen **Unter-Knoten** mit der Bezeichnung **Spannung**. Dieser wiederum den weiteren Knoten **Oberfläche** und noch eine Ebene tiefer den Eintrag **Deformation**. Hierbei handelt es sich um die Darstellung der **von-Mises-Vergleichsspannung** auf der Oberfläche der Geometrie. Dies ist bereits ein Teil des Postprocessing.

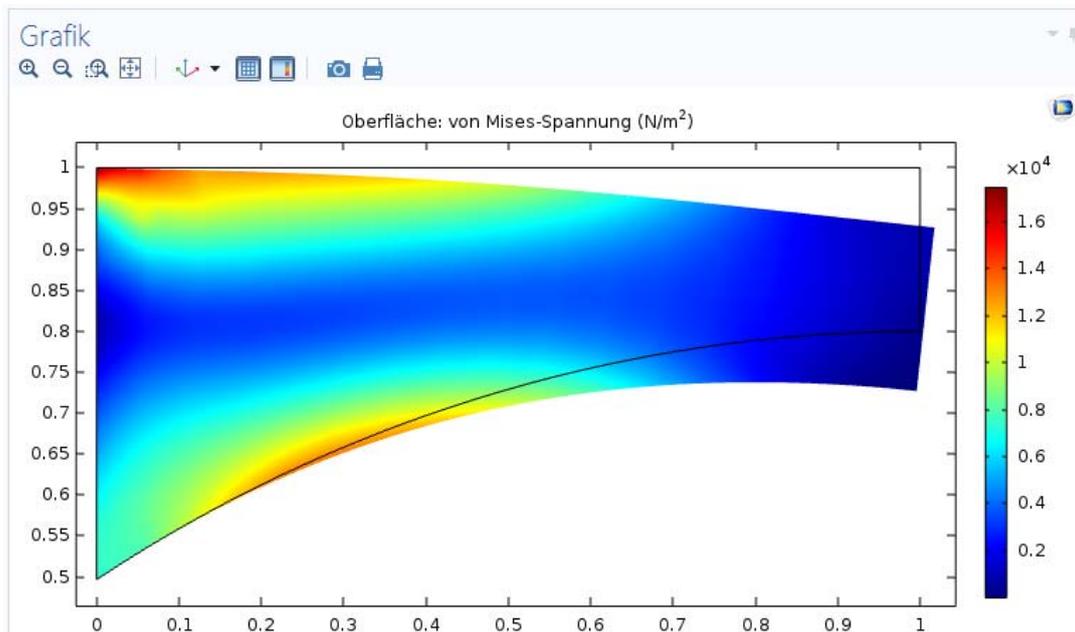


Abbildung 26: 2D - von Mises-Vergleichsspannung in deformierter 2D-Darstellung

2.6 Das 2D-Postprocessing

Das Postprocessing folgt dem Preprocessing und der Lösung. Mit diesem Teil des Programms kann der Anwender leicht und effizient die in der Lösungsphase berechneten Resultate untersuchen und auswerten. Diese Resultate können z. B. Verschiebungen, Temperaturen, Spannungen, Geschwindigkeiten, Wärmeströme und andere Größen beinhalten. Die Ausgabe der Auswertungsphase des Programms erfolgt als grafische Darstellung auf dem Bildschirm und/oder in Form von Tabellen, die ausgedruckt und in Berichte eingefügt werden können. Bildschirmdarstellungen können während einer interaktiven Auswertung auf einem Grafikbildschirm online erzeugt oder offline auf einem Plotter gezeichnet werden. Nachdem die darzustellenden Daten durch Selektieren ausgewählt wurden, können diese in verschiedenen grafischen Formen dargestellt werden. Konturdarstellungen in Form von Isolinien, Farbschattierungen oder Isoflächen zeigen beispielsweise die Verteilung der Spannungen im Bauteil.

2.6.1 Die 2D-Verschiebungen

Im vorliegenden Beispiel wird zunächst eine Darstellung der Verschiebungen erzeugt. Dazu wird der **Ergebnis-Knoten** markiert und aus dem Kontextmenu die **2D-Plottgruppe** ausgewählt.

Ergebnis-Knoten > Kontextmenu > 2D-Plottgruppe

Es öffnet sich das Einstellungs-Fenster mit dem Titel **2D-Plottgruppe**. Dieses Fenster mit seinen zahlreichen Bereichen dient zur Steuerung der grafischen Darstellung der Lösung. Es kann z. B. im Feld **Label** die Bezeichnung **Verschiebung** vergeben werden. Dieses neue Label ersetzt im Modellbaum die Bezeichnung des Unter-Knotens 2D-Plottgruppe.

Zur Darstellung der Verformung wird zunächst der Unter-Knoten **Verschiebung** markiert und aus dessen Kontextmenu **Oberfläche** ausgewählt. Es öffnet sich das zugehörige Einstellungs-

Fenster. Im Bereich **Ausdruck** kann im gleichnamigen Feld direkt der Ausdruck der gewünschten Größe eingetragen, ein Ausdruck eingefügt  oder der vorhandene Ausdruck ersetzt  werden. Bei Bedarf ist eine Anpassung der **Einheit** über die Liste oder Eingabe im zugehörigen Feld möglich.

Öffnen Sie das Listenfeld **Ausdruck ersetzen** und wählen Sie den Baueintrag **v-Verschiebungsfeld, Y-Komponente** (Modell> Komponente 1> Festkörpermechanik> Verschiebung> Verschiebungsfeld) aus. Durch einen Doppelklick oder durch Drücken der Eingabetaste wird der Ausdruck in das Feld übernommen. Die Betätigung der Schaltfläche **Plotten** erzeugt im Grafik-Fenster die Darstellung der y-Verschiebung. Um diese Darstellung in deformierter Gestalt anzuzeigen, wird der Unter-Knoten **Oberfläche** (vom Verschiebungs-Knoten) markiert und in dessen Kontextmenu **Deformation** ausgewählt. Dadurch wird eine grafische Darstellung der Durchbiegung des Modells erzeugt. Die Verschiebungen wurden dabei automatisch so skaliert, dass die Verformung erkennbar wird.

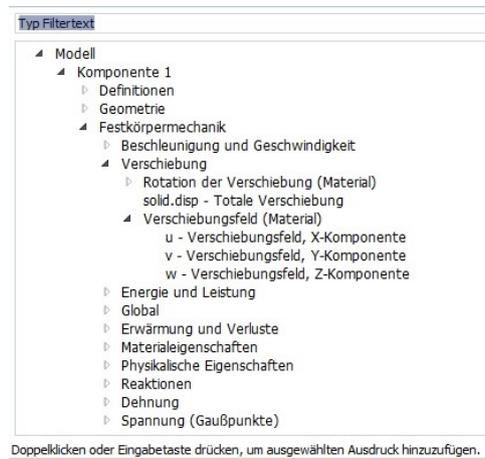


Abbildung 27: Auswahl von y-Verschiebung

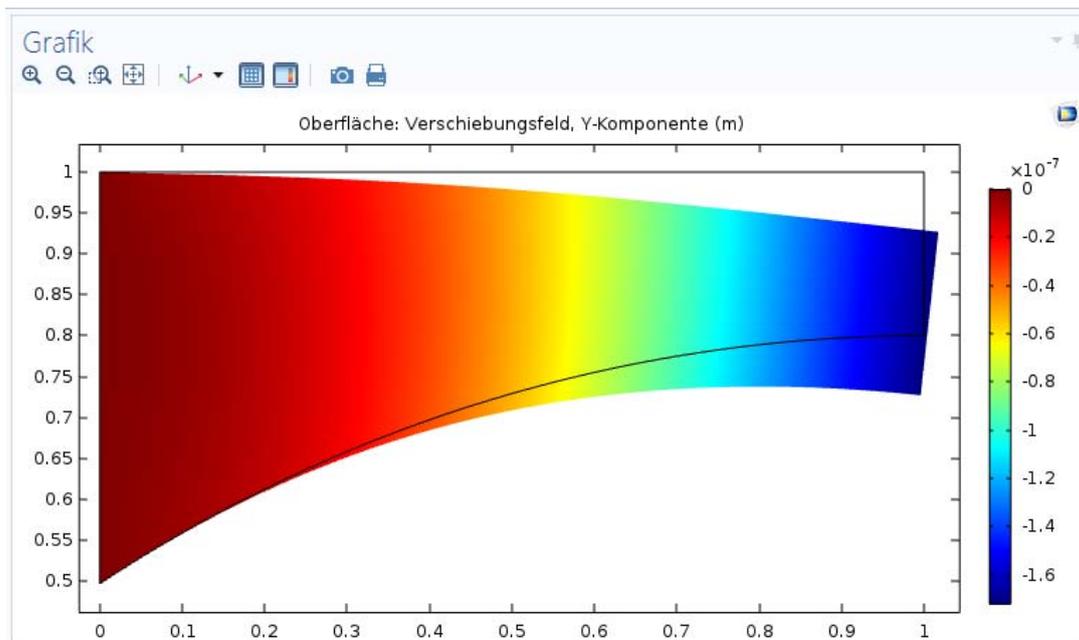


Abbildung 28: y-Verschiebung in deformierter 2D-Darstellung

2.6.2 Die 2D-Spannungsverteilung

Nun wird eine weitere Farbkontur-Darstellung mit der Biegespannung in Querrichtung (entlang der x-Achse) erzeugt. Dazu wird der **Ergebnis-Knoten** markiert und aus dem Kontextmenu die **2D-Plottgruppe** ausgewählt.

Ergebnis-Knoten> Kontextmenu> 2D-Plottgruppe

Es öffnet sich das Einstellungs-Fenster mit dem Titel **2D-Plottgruppe**. Geben Sie als neues Label **Sx-Spannung** ein.

Zur Darstellung der Spannung wird wiederum der Unter-Knoten **Sx-Spannung** markiert und mittels des Kontextmenus der neue Unter-Knoten **Oberfläche** erzeugt. Wie in Kapitel 2.6.1 erklärt, wird der vordefinierte Ausdruck durch **solid.sx - Spannungstensor, x-Komponente**

ersetzt (Modell> Komponente 1> Festkörpermechanik> Spannung> Spannungstensor). Durch Betätigen der Schaltfläche **Plotten** wird eine grafische Darstellung der Verteilung dieses Spannungswertes im Modell erzeugt. Eine Farbskala zeigt den kleinsten und größten Wert der Spannung im Modell an. Durch die Farbverteilung ist deutlich die hochbeanspruchte Zone von den Zonen geringerer Beanspruchung zu unterscheiden.

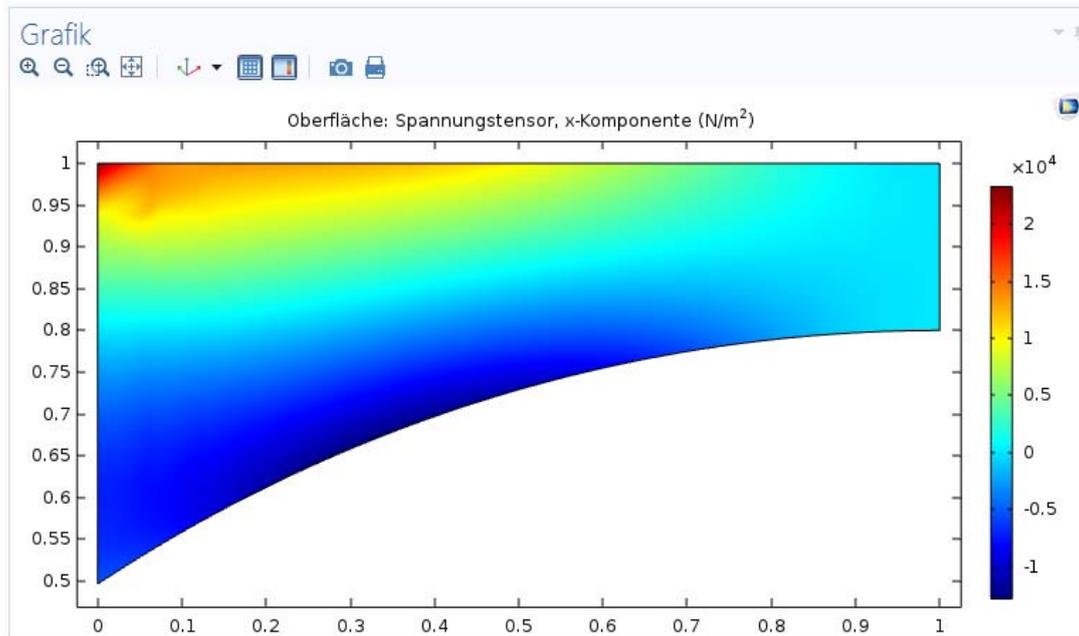


Abbildung 29: Biegespannung entlang der x-Achse

2.6.3 Die Spannungen entlang von Schnitten im 2D-Modell

Mit x-y-Diagrammen lassen sich Größen entlang eines beliebigen Schnittes bzw. Pfades durch die Struktur über dem Weg darstellen. Die auf den Schnitt bzw. Pfad durch das Modell interpolierten Größen können dann als Grafiken oder Tabellen ausgegeben werden.

Im vorliegenden Beispiel soll in einem senkrechten Schnitt im mittleren Bereich die x-Komponente der Spannungen als Diagramm aufgetragen werden. Dazu ist zunächst der Schnitt durch das Modell festzulegen.

Markieren Sie den Unter-Knoten **Datensätze** und wählen Sie aus dem Kontextmenu **Schnittlinie 2D** aus. Es öffnet sich das Einstellungs-Fenster mit dem Titel **Schnittlinie 2D**. Im Bereich **Liniendaten** wird die **Linieneingabemethode Zwei Punkte** verwendet. Geben Sie jetzt für **Punkt 1** als Koordinaten die Werte **0.5** für X und **0.6** für Y sowie **0.5** für X und **1.0** für Y des **zweiten Punktes** ein. Schließen Sie die Eingabe durch Betätigen der Schaltfläche **Plotten** ab.

Danach wird wieder der Ergebnis-Knoten markiert und aus dem Kontextmenu **1D-Plotgruppe** ausgewählt.

Ergebnis-Knoten> Kontextmenu> 1D-Plotgruppe

Im Einstellungs-Fenster selektieren Sie im Bereich **Daten** als **Datensatz** die **Schnittlinie 2D**. Jetzt wird aus dem Kontextmenu des Unter-Knotens **1D-Plotgruppe** als Ausgabe die **Linien-darstellung** gewählt. Im zugehörigen Einstellungs-Fenster erfolgt im Bereich **y-Achsendaten** auf die beschriebene Weise die Ersetzung des Ausdrucks durch **solid.sx – Spannungstensor, x-Komponente**.

Durch Betätigen der Schaltfläche **Plotten** erscheint im Grafik-Fenster die entsprechende Kurve. Bei genauerer Betrachtung stellen Sie jedoch fest, dass hier die von Sx-Spannung über der

Bogenlänge aufgetragen ist. Sie ändern dies, indem im Bereich **x-Achsendaten** als Parameter **Ausdruck** eingestellt wird. Danach wird der vordefinierte Ausdruck durch die Geometrie der Materialkoordinate **Y - Y-Koordinate** (Modell> Komponente 1> Geometrie> Material-Koordinate) ersetzt und die Aktion durch Betätigen der Schaltfläche **Plotten** abgeschlossen. Im Grafik-Fenster wird nun der Verlauf der Spannungskomponente S_x über dem Schnitt als Diagramm grafisch dargestellt.

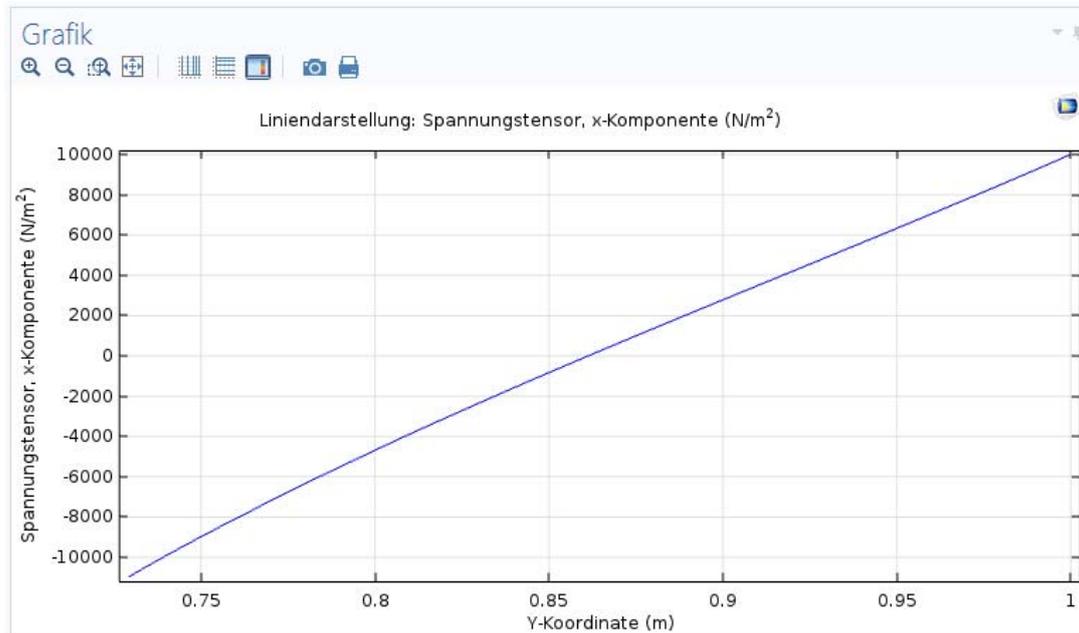


Abbildung 30: S_x -Spannung entlang einer 2D-Schnittlinie

Möchten Sie dem Diagramm einen weiteren Verlauf hinzufügen, markieren Sie noch einmal den Unter-Knoten **1D-Plotgruppe** und wählen aus dem Kontextmenu eine weitere **Liniendarstellung** aus, sodass die 1D-Plotgruppe jetzt zwei Liniendarstellungen enthält. Stellen Sie für die zweite Kurve als Ausdruck von **Mises-Spannung** ein und ändern die x-Achsendaten ebenfalls auf die **Y-Materialkoordinate**. Im Grafik-Fenster werden nun der Verlauf der Spannungskomponente S_x und die von Mises-Spannung über dem Schnitt als Diagramm grafisch dargestellt.

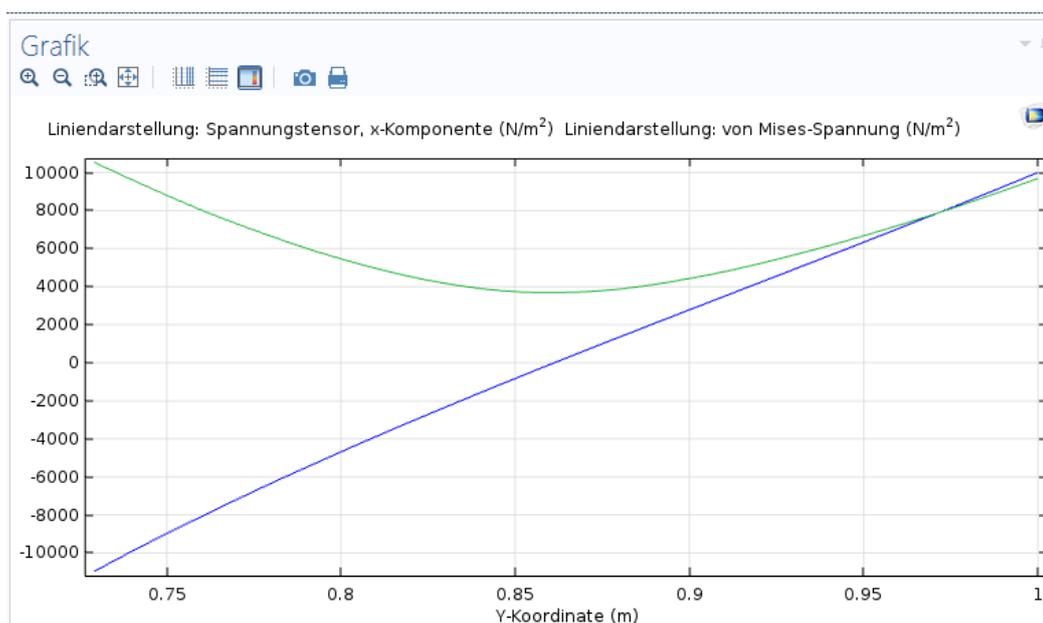


Abbildung 31: Darstellung zweier Spannungen entlang eines Schnittes

3. 3D-Balkonplatte

3.1 3D-Aufgabenstellung

Die Aufgabenstellung entspricht weitgehend der Aufgabenstellung des 2D-Beispiels. Die zu berechnende Struktur stellt eine etwa 2 m breite Platte dar, die mit einem Balkon vergleichbar ist. Die Platte ist an einer Seite (an der Hauswand) fest eingespannt und ragt 1 m nach außen. Die Plattendicke beträgt am freien Außenrand 0.2 m. Die untere Seite ist gerundet, sie wird von der Außenkante zur Einspannung hin dicker. Der Radius dieser Rundung beträgt 1.8 m. Die Platte ist an der Oberseite durch eine Verkehrslast beaufschlagt, die als Flächenlast (Druck) einzugeben ist.

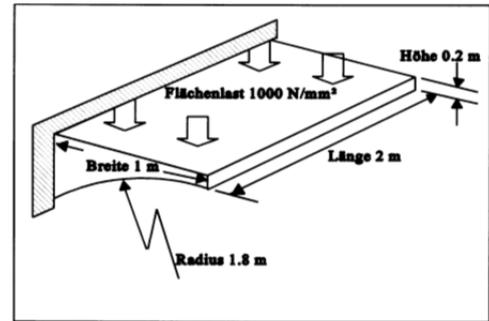


Abbildung 32: Skizze der 3D-Balkonplatte

3.2 3D-Idealisierung

Die Aufgabe wird mit einer statischen strukturmechanischen Berechnung gelöst. Die Struktur wird durch ein 3-dimensionales Modell abgebildet. Dazu wird ein Elementtyp verwendet, der als Volumen definiert ist. Damit wird die gesamte Platte unter Berücksichtigung der Einwirkungen der Plattenränder abgebildet.

Zunächst erfolgt bei der Modellerstellung die Erzeugung des in Abbildung 32 dargestellten Volumens. Danach wird die seitliche Fläche ausgewählt, die in Abbildung 22 das Modell darstellte. Anschließend wird diese Fläche vernetzt. Zum Abschluss wird das „2D-Netz“ in die dritte Richtung „herausgezogen“ (extrudiert) und damit das komplette Volumen mit einem Netz versehen.

3.3 Preprocessing (3D)

3.3.1 3D-Geometriemodellierung

Vor der Erzeugung der 3D-Balkonplatte wird ein neues Modell erstellt. Nach der Wahl des **Modell-Assistenten** wird im nächsten Fenster die Raumdimension **3D** ausgewählt.

Anschließend legen Sie fest, dass es sich um ein strukturmechanisches Modell unter Verwendung der **Festkörpermechanik (solid)** handelt.

Abschließend geben Sie bei der Auswahl der **Studie** an, dass bei der Simulation eine **stationäre Analyse** durchgeführt werden soll.

Jetzt wird zunächst als Geometrie ein **Quader** mit der **Breite 1**, **Tiefe 1** und **Höhe 1.8** erzeugt, wobei die Basis-Position unverändert bleibt. Danach erfolgt die Erzeugung eines **Zylinders** mit einem **Radius** von **1.8** und einer **Höhe** von **1.8**. Dabei wird die **Position** der Kreismittelpunktes an den Koordinaten **x: 1**, **y: -1** und **z: 0** festgelegt.

Als Abschluss der 3D-Geometriemodellierung wird mittels der **Bool'schen Operation** die **Differenz** von Quader und Kreis gebildet. Es ergibt sich die in Abbildung 32 dargestellte 3D-Balkonplatte.

3.3.2 Die 3D-Materialdaten

Wie in **Kapitel 2.4.3** beschrieben wird der Komponente ein leeres Material mit den Kennwerten **Elastizitätsmodul E: 200e9** und **Poissonzahl nu: 0.3** hinzugefügt.

3.3.3 Die 3D-Randbedingungen

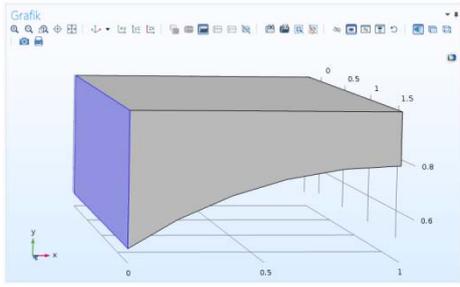


Abbildung 33: Flächenauswahl für das Festlager

Die Festhaltung am linken Rand des Modells wird mittels eines **Festlagers** realisiert. Hierzu gehen Sie wie in **Kapitel 2.4.4** vor. Anstelle einer Randlinie wird jedoch die **Randfläche 1** ausgewählt, die sich an der Hauswand befindet.

Zum Aufbringen der Drucklast am oberen Rand des Modells wählen Sie **Rand- oder Oberflächenlast** aus und markieren Sie im Grafik-Fenster die **Randfläche 5**. Danach stellen Sie den **Lasttyp: Last, definiert als Kraft pro Einheitsfläche** ein und geben in das Feld für die **y-Richtung** den Wert **-1000** ein.

3.3.4 Das 3D-Netz

Erstellen Sie zunächst, wie im **Kapitel 2.4.5** erläutert, eine **strukturierte Vernetzung** der seitlichen (vorderen) Fläche, die im Einstellungsfenster des Unter-Knotens **Strukturiert** vorher noch ausgewählt werden muss, mit **5 mal 5 Elementen**.

Anschließend markieren Sie den **Netz-Knoten** und wählen aus dem Kontextmenu **Extrudiert** aus. Direkt anschließend wird der neue Unter-Knoten **Extrudiert** markiert und aus dessen Kontextmenu **Verteilung** gewählt.

Netz-Knoten > Kontextmenu > Extrudiert

Extrudiert > Kontextmenu > Verteilung

Im Einstellungs-Fenster mit dem Titel **Extrudiert** wird im Bereich **Ursprungsfläche** die bereits **vernetzte Fläche 4** selektiert. Anschließend erfolgt im Bereich **Zielfläche** die Auswahl der gegenüber liegenden **Fläche 3**. Danach stellen Sie im Bereich **Verteilung** als **Verteilungseigenschaften: Feste Anzahl von Elementen** ein und geben als Anzahl der Elemente den Wert **10** ein.

Die regelmäßige Vernetzung der Geometrie wird durch **Erzeuge ausgewählte** gestartet und die erzeugten Elemente automatisch im Grafik-Fenster dargestellt.

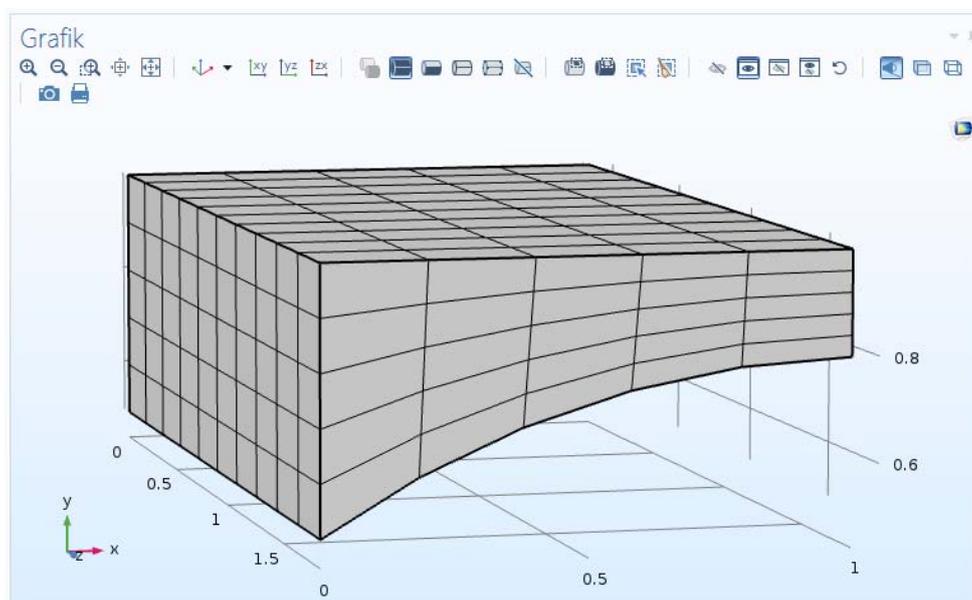


Abbildung 34: Strukturierte 3D-Vernetzung mit 5 mal 5 mal 10 Elementen

3.4 Die Berechnung des 3D-Lastfalles

Für die Berechnung des Lastfalles wird der **Studie-Knoten** markiert und im Kontextmenu **Berechnen** ausgewählt. Alternativen: Im Einstellungs-Fenster mit dem Titel **Studie** auf die Schaltfläche **Berechnen** klicken. Die Schaltfläche **Berechnen** im **Home-Tab** oder im **Studie-Tab** betätigen.

Studie-Knoten> Kontextmenu> Berechnen

Nach Abschluss der Berechnung wird automatisch eine Lösung im Grafik-Fenster dargestellt. Zusätzlich hat der Ergebnis-Knoten einen neuen **Unter-Knoten** mit der Bezeichnung **Spannung**. Dieser wiederum den weiteren Knoten **Oberfläche** und noch eine Ebene tiefer den Eintrag **Deformation**. Hierbei handelt es sich um die Darstellung der **von-Mises-Vergleichsspannung** auf der Oberfläche der Geometrie. Dies ist bereits ein Teil des Postprocessing.

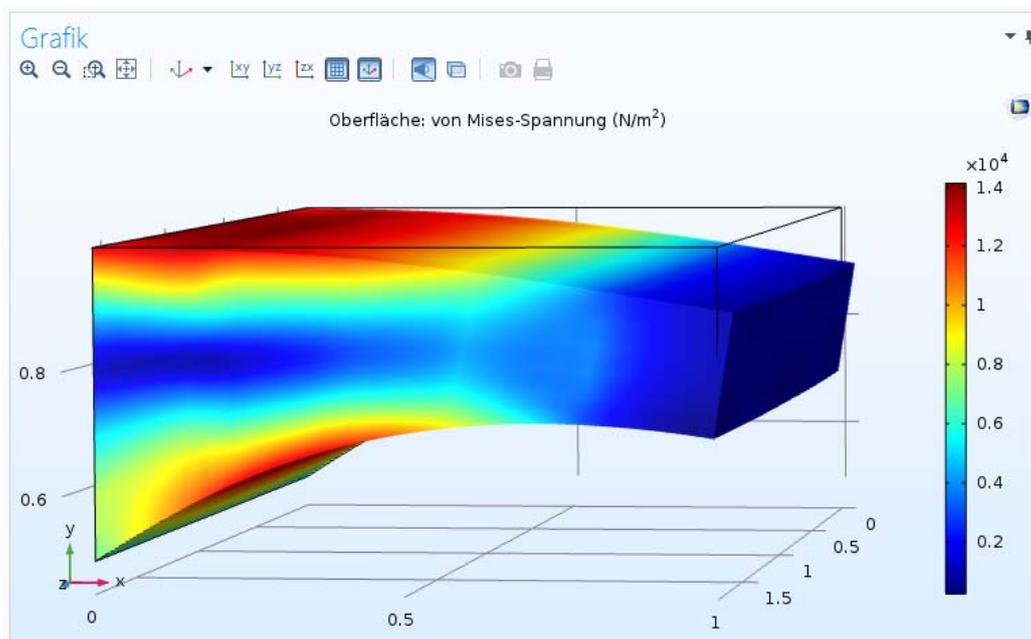


Abbildung 35: 3D - von Mises-Vergleichsspannung in deformierter 3D-Darstellung

3.5 Das 3D-Postprocessing

3.5.1 Die 3D-Verschiebungen

Im vorliegenden Beispiel wird zunächst eine Darstellung der Verschiebungen erzeugt. Dazu wird der **Ergebnis-Knoten** markiert und aus dem Kontextmenu die **3D-Plotgruppe** ausgewählt.

Ergebnis-Knoten> Kontextmenu> 3D-Plotgruppe

Es öffnet sich das Einstellungs-Fenster mit dem Titel **3D-Plottgruppe**. Geben Sie als neues Label **Verschiebung** ein.

Zur Darstellung der Verformung wird zunächst der Unter-Knoten **Verschiebung** markiert und aus dessen Kontextmenu **Oberfläche** ausgewählt. Es öffnet sich das zugehörige Einstellungs-Fenster. Im Bereich **Ausdruck** wird der vordefinierte Ausdruck durch **v-Verschiebungsfeld, Y-Komponente** ersetzt. Bei Bedarf ist eine Anpassung der **Einheit** über die Liste oder Eingabe im zugehörigen Feld möglich.

Um diese Darstellung in deformierter Gestalt anzuzeigen, wird der Unter-Knoten **Oberfläche** (vom Verschiebung-Knoten) markiert und in dessen Kontextmenu **Deformation** ausgewählt.

Dadurch wird eine grafische Darstellung der Durchbiegung des Modells erzeugt. Die Verschiebungen wurden dabei automatisch so skaliert, dass die Verformung erkennbar wird.

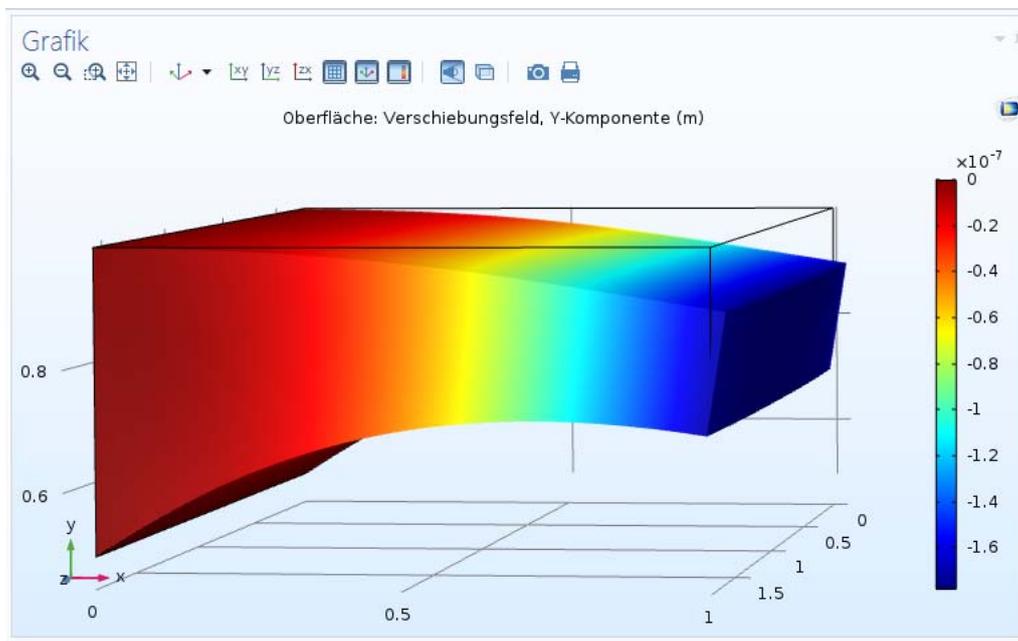


Abbildung 36: y-Verschiebung in deformierter 3D-Darstellung

3.5.2 Die Spannungen entlang von Schnitten im 3D-Modell

Im vorliegenden Beispiel soll mit einem senkrechten Schnitt im mittleren Bereich der linken Fläche (Hauswand) die x-Komponente der Spannungen (solid.sx) als Diagramm aufgetragen werden. Dazu ist zunächst der Schnitt im Modell festzulegen.

Markieren Sie den Unter-Knoten **Datensätze** und wählen Sie aus dem Kontextmenu **Schnittlinie 3D** aus. Es öffnet sich das Einstellungs-Fenster mit dem Titel **Schnittlinie 3D**. Im Bereich **Liniendaten** wird die Linieneingabemethode **Zwei Punkte** verwendet. Geben Sie jetzt für Punkt 1 als Koordinaten die Werte **0** für **X** und **0.4** für **Y** und **1** für **Z** sowie **0** für **X** und **1** für **Y** und **1** für **Z** des zweiten Punktes ein. Schließen Sie die Eingabe durch Betätigen der Schaltfläche **Plotten** ab.

Danach wird wieder der **Ergebnis-Knoten** markiert und aus dem Kontextmenu **1D-Plotgruppe** ausgewählt.

Ergebnis-Knoten > Kontextmenu > 1D-Plottgruppe

Im Einstellungs-Fenster selektieren Sie im Bereich **Daten** als Datensatz die **Schnittlinie 3D**. Jetzt wird aus dem Kontextmenu des Unter-Knotens **1D-Plotgruppe** als Ausgabe die **Linien-darstellung** gewählt. Im zugehörigen Einstellungs-Fenster erfolgt im Bereich **y-Achsendaten** auf die beschriebene Weise die Ersetzung des Ausdrucks durch **solid.sx – Spannungstensor, x-Komponente**.

Ändern Sie jetzt noch im Bereich **x-Achsendaten** den Parameter auf **Ausdruck**, wählen unter Geometrie die Materialkoordinate **Y – Y-Koordinate** aus und schließen die Aktion durch Betätigen der Schaltfläche **Plotten** ab.

Im Grafik-Fenster wird nun der Verlauf der Spannungskomponente S_x über dem Schnitt als Diagramm grafisch dargestellt.

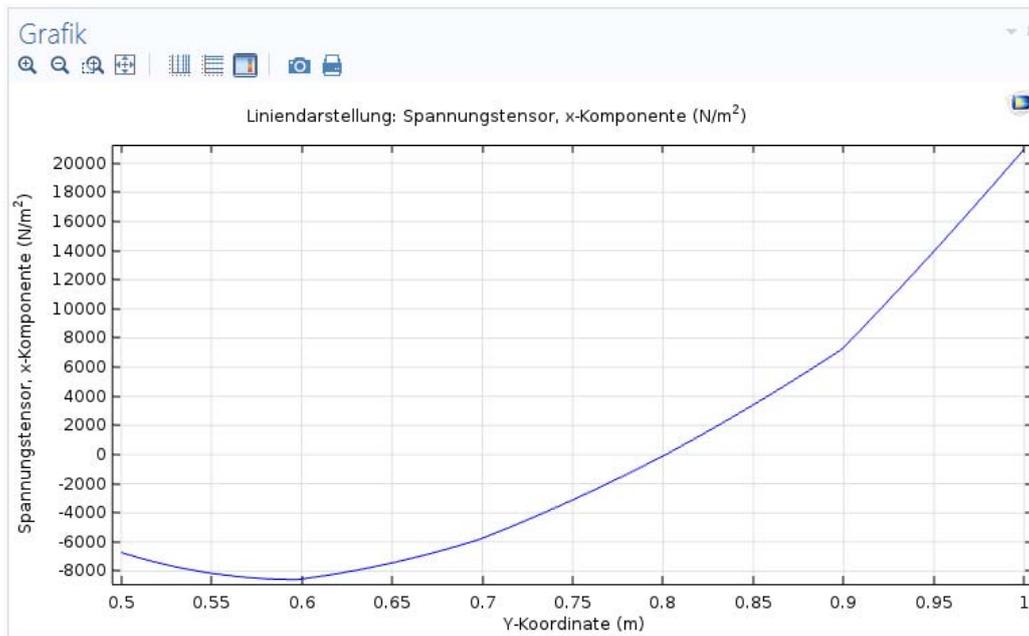


Abbildung 37: S_x -Spannung entlang einer 3D-Schnittlinie

4. Weitere Postprocessingmöglichkeiten

4.1 Export von Ergebnissen

Es besteht die Möglichkeit **Abbildungen** und Diagramme als **Bild-Dateien** sowie **Plot-Daten** als **Daten-Dateien** zu exportieren.

Um **Abbildungen** oder **Diagramme** zu exportieren, wird zunächst der Knoten **3D- / 2D- oder 1D-Plotgruppe** markiert und aus dem Kontextmenu **Abbildung zum Export hinzufügen** ausgewählt.

Ergebnis-Knoten > Plotgruppe > Kontextmenu > **Abbildung zum Export hinzufügen**

Hierdurch wird dem Knoten **Exportieren** ein neuer Unter-Knoten z. B. **3D-Abbildung** hinzugefügt. Das zugehörige Einstellungs-Fenster mit seinen zahlreichen Bereichen dient zur Steuerung des Exports. Es kann z. B. im Feld **Subjekt** eine der im Modell vorhandenen Plotgruppen ausgewählt werden. Weiterhin können u. a. Einstellungen zum Dateiformat, dem Dateinamen und dem zu exportierenden Layout vorgenommen werden. Durch Betätigen der Schaltfläche **Exportieren** wird die Ausführung gestartet.

Um **Plot-Daten** zu exportieren, wird zunächst der entsprechende Unter-Knoten der Plotgruppe (Volumen, Oberfläche, Liniendarstellung) markiert und aus dem Kontextmenu **Plot-Daten zum Export hinzufügen** ausgewählt.

Ergebnis-Knoten > Plotgruppe > Liniendarstellung > Kontextmenu > **Plot-Daten zum Export hinzufügen**

Es wird dem Knoten **Exportieren** wieder ein neuer Unter-Knoten z. B. **1D-Abbildung** hinzugefügt und im Einstellungs-Fenster können die oben beschriebenen Einstellungen vorgenommen werden.

4.2 Ermittlung von Minima und Maxima

Das Programm beinhaltet zudem die Möglichkeit Minima und Maxima des berechneten Modells zu ermitteln und anzuzeigen.

Um **Minima** oder **Maxima** zu ermitteln, wird der Knoten **Abgeleitete Größen** markiert und aus dem Kontextmenu z. B. aus der Liste **Minimum > Minimum auf der Linie** ausgewählt.

Ergebnis-Knoten > Abgeleitete Größen > Kontextmenu > Minimum > Minimum auf der Linie

Es öffnet sich das Einstellungs-Fenster mit dem gleichnamigen Titel. Im Bereich **Daten** wird aus der Liste des Feldes **Datensatz** eine zuvor unter dem Knoten Datensätze definierte **Schnittlinie** ausgewählt. Anschließend wird auf die bekannte Weise der Ausdruck festgelegt, dessen Minimum ermitteln soll. Mit Betätigen der Schaltfläche **Auswerten** wird das ermittelte Minimum im Tab **Tabelle** des **Informations-Fensters** angezeigt und gleichzeitig die erzeugte Tabelle den Knoten **Tabellen** hinzugefügt.

The screenshot shows a software window titled 'Tabelle 1' with tabs for 'Mitteilungen', 'Fortschritt', and 'Log'. Below the tabs is a toolbar with various icons. The main content area displays a table with the following data:

Verschiebungsfeld, Z-Komponente (m)	
-1.6993E-4	

Abbildung 38: Informations-Fenster mit Minimum-Wert der z-Verschiebung

Im oberen Bereich des Tabs **Tabelle** befinden sich Werkzeuge, mit denen u. a. die Tabelleneinstellungen, die Darstellung des Tabellenwertes und das Leeren oder das Löschen einer Tabelle vorgenommen werden können.

5. Analytische Berechnungen zur Druckmembran

5.1 Kirchhoff'sche Plattengleichung

In der Vorlesung wird die Kirchhoff'sche Plattengleichung für die Auslenkung $w(x,y)$ einer runden Drucksensormembran behandelt:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

5.2 Näherungsform der Kirchhoff'schen Plattengleichung

Führt man zunächst die Näherung ein, dass nur der Querschnitt der Platte in der Mittenposition der Plattenlänge bzw. Plattenbreite bei $y = a/2 = \text{konstant}$ betrachtet wird, so reduziert sich das Problem auf den 1D-Fall ($w(x,y) \rightarrow w(x)$) und ist dadurch sehr leicht lösbar!

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{q}{D}$$

$$\partial^4 w = \frac{q}{D} \cdot \partial x^4$$

$$w = \frac{q}{D} \cdot \iiint \int 1 \cdot \partial x^4$$

$$w(x) = \frac{q}{D} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot x^4 + C_1 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot x^3 + C_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + C_3 \cdot x + C_4 \right)$$

Die Ableitung der Funktion ist:

$$w'(x) = \frac{\delta w}{\delta x} = \frac{q}{D} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 3} \cdot x^3 + C_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + C_2 \cdot x + C_3 \right)$$

Die Platte habe die Dicke h und die Breite a . Ferner sei sie am Rand fest eingespannt. Auf der linken Seite der Einspannung befinde sich der Ursprung des Koordinatensystems.

Daraus ergeben sich folgende Randbedingungen:

$$\begin{aligned} w(x=0) &= 0 & w(x=a) &= 0 \\ w'(x=0) &= 0 & w'(x=a) &= 0 \\ w'(x=a/2) &= 0 \end{aligned}$$

Aus $w(x=0) = 0$ folgt $C_4 = 0$

Aus $w'(x=0) = 0$ folgt $C_3 = 0$

Aus $w(x=a) = 0$ folgt $a^2 + 4 \cdot C_1 \cdot a + 12 \cdot C_2 = 0$
 $w'(x=a) = 0$ $a^2 + 3 \cdot C_1 \cdot a + 6 \cdot C_2 = 0$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt:

$$C_2 = \frac{1}{12} \cdot a^2$$

$$C_1 = -\frac{1}{2} \cdot a$$

Durch das Einsetzen der Konstanten erhält man folgende Lösungsgleichung für die Auslenkung $w(x)$:

$$w(x) = \frac{q}{D} \cdot \left(\frac{1}{24} \cdot x^4 - \frac{1}{12} \cdot a \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot a^2 \cdot x^2 \right)$$

Die maximale Auslenkung w_{\max} der Platte befindet sich in der Mitte, also bei $w(x=a/2)$. Hieraus ergibt sich für eine Membran mit der Kantenlänge a folgende Gleichung:

$$w_{\max}(x = a/2) = \frac{q}{D} \cdot \left(\frac{1}{24} \cdot x^4 - \frac{1}{12} \cdot a \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot a^2 \cdot x^2 \right)$$

$$w(a) = \frac{1}{384} \cdot \frac{q}{D} \cdot a^4$$

Wenn Sie das gleiche Näherungsverfahren, d.h. nur die Querschnittsfläche durch das Membranzentrum betrachten, lautet die Lösung $w_{\max}(R)$ einer runden Membran mit dem Durchmesser $d=a=2R$ und dem gleichen Ursprung des Koordinatensystems:

$$w_{\max}(x = a/2 = R) = \frac{q}{D} \cdot \left(\frac{1}{24} \cdot x^4 - \frac{1}{12} \cdot a \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot a^2 \cdot x^2 \right)$$

$$w(a) = \frac{1}{24} \cdot \frac{q}{D} \cdot R^4$$

Mit der Plattensteifigkeit

$$D = \frac{1}{12} \cdot \frac{E \cdot h^3}{1 - \nu^2}$$

ergibt sich

$$w_{\max}(R) = \frac{1}{2} \cdot q \cdot \frac{(1 - \nu^2)}{E} \cdot \frac{R^4}{h^3}$$

Exakte Lösung für Kreismembranen aus der Vorlesung:

$$w_{\max}(R) = \frac{3}{16} \cdot q \cdot \frac{(1 - \nu^2)}{E} \cdot \frac{R^4}{h^3}$$

Vergleicht man die genäherte Lösung mit der in der Vorlesung ermittelten exakten Lösung ergibt sich ein Unterschied von 166,7 % !

$$U = \frac{\frac{3}{16} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{16}} = \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{16}{3} = 1 - \frac{16}{6} = 1 - \frac{8}{3} = -1,6667 = -166,7\%$$

5.3 Radiale und Tangentiale Spannungskomponente der Kreismembran

Aus der exakten Lösung für die Kreismembran folgen die nachfolgenden Gleichungen für die tangentielle und radiale mechanische Spannungskomponente:

$$\sigma_r = \frac{3}{4} \cdot \frac{R^2}{h^3} \cdot z \cdot \Delta p \cdot \left\{ (3 + \nu) \cdot \frac{r^2}{R^2} - (1 + \nu) \right\}$$

$$\sigma_t = \frac{3}{4} \cdot \frac{R^2}{h^3} \cdot z \cdot \Delta p \cdot \left\{ (1 + 3 \cdot \nu) \cdot \frac{r^2}{R^2} - (1 + \nu) \right\}$$

dabei sind

Δp : Druck

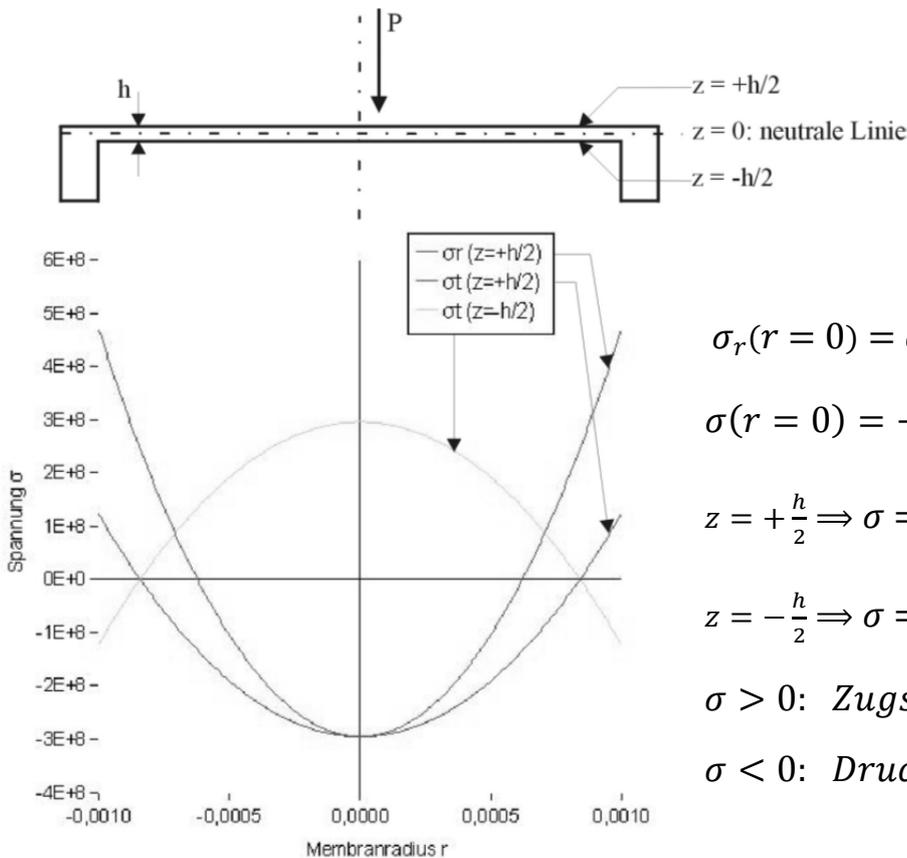
z : Auslenkungsordinate \Rightarrow maximale Auslenkung: $z_{\max} = \pm h/2$

R : Membranradius

h : Membrandicke

r : radiale Koordinate

ν : Poisson-Zahl $\Rightarrow \nu_{(111)} = 0,35$ und $\nu_{(110)} = 0,066$ für Silizium



$$\sigma_r(r=0) = \sigma_t(r=0) = \sigma(r=0)$$

$$\sigma(r=0) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{R^2}{h^3} \cdot z \cdot \Delta p \cdot (1 + \nu)$$

$$z = +\frac{h}{2} \Rightarrow \sigma = -\frac{3}{8} \cdot \frac{R^2}{h^2} \cdot \Delta p \cdot (1 + \nu)$$

$$z = -\frac{h}{2} \Rightarrow \sigma = +\frac{3}{8} \cdot \frac{R^2}{h^2} \cdot \Delta p \cdot (1 + \nu)$$

$\sigma > 0$: Zugspannung

$\sigma < 0$: Druckspannung

Abbildung 39: Spannungen einer runden Druckmembran

5.4 Nullstellen der radialen und tangentialen Spannungskomponente von Kreismembranen

Die analytischen Ausdrücke zur Ermittlung der Nullstellen der radialen und tangentialen Spannungskomponenten für Kreismembranen ($\sigma_{r/t}=0$) können aus den in **Kapitel 5.3** angegebenen Spannungs-Formeln hergeleitet werden.

Wenn der triviale Fall, dass kein Druck Δp auf die Membran wirkt, nicht berücksichtigt wird, können Nullstellen nur auftreten, wenn der Ausdruck in den $\{\dots\} = 0$ ist.

Für die in der Tabelle 1 aufgeführten Membranen ergeben sich dann die angegebenen Nullstellen:

Membranmaterial	Si - (100)	Si - (111)	Si - (111)	Si ₃ N ₄
Membrandicke h	4 μm	1 μm	2,5 μm	1 μm
Membranradius R	1000 μm	100 μm	100 μm	150 μm
Querkontraktionszahl ν	0,26	0,14	0,14	0,20
E-Modul	160 GPa	152 GPa	152 GPa	320 GPa
radiale Nullstell	$\pm 621,7 \mu\text{m}$	$\pm 60,3 \mu\text{m}$	$\pm 60,3 \mu\text{m}$	$\pm 91,9 \mu\text{m}$
tangentiale Nullstellen	$\pm 841,4 \mu\text{m}$	$\pm 89,6 \mu\text{m}$	$\pm 89,6 \mu\text{m}$	$\pm 129,9 \mu\text{m}$

Tabelle 1: Nullstellen unterschiedlicher Membranen

