Forschendes Lernen in der Vorlesung: geht das?

Minisymposium

Was sind und was sollen Vorlesungen in der Mathematik?

DMV Jahrestagung 2022

Daniel Grieser (Uni Oldenburg)

13. September 2022

Was heißt *Forschendes Lernen* in der Mathematik?

- **Jedes verständnisgeleitete Lernen ist auch ein Forschen**
- Fragen stellen
- Entdecken von Lösungen, Zusammenhängen
- Problemlösen

Zwei Begriffe von *Forschen:*

- individuell

  Ich entdecke etwas, auch wenn andere es längst verstehen

- Wissenschaft als Ganzes

Wo findet Lernen im Mathematik-Studium statt?

- Vorlesungen
- Seminare
- individuelle Betreuung
- Selbststudium
- Austausch mit Kommilitonen

Die Vorlesung ist der Hauptort des Lehrenden-Lernenden Kontakts

Warum?

- Kapazität
- Effizienz (wenn es gut läuft)

Wie passen Forschendes Lernen und Vorlesungen zusammen?

- Fragen vor den Antworten, z.B.
  - Wie könnte man dieses Problem angehen?
  - Worauf kommt es hier an, warum funktioniert das?
  - Wie können wir diese Idee (eines Begriffs, eines Satzes, eines Beweises) präzisieren?
- Zeit zum Nachdenken lassen
- Geleitetes Erarbeiten von Antworten

Aber: Das Mathematik-Studium soll noch viel mehr leisten, z.B.

- Erlernen von Techniken (zum Rechnen, Beweisen, Problemlösen)
- Überblick über mathematische Teilgebiete und ihre Anwendungen
- Vorbereitung auf die Berufswelt

Praxis: In der Konkurrenz

$$\text{Theorie- und Technikvermittlung} \longleftrightarrow \text{kreatives Nachdenken}$$

verliert meist die Kreativität (auch in Übungsaufgaben)

‚Mathematisches Problemlösen und Beweisen‘

Leitidee

Jede/r Mathematik-Studierende kann und sollte die Erfahrung machen:

„Ich kann Mathematik entdecken!“

Organisatorisches:

- Große Vorlesung (2h/Woche)
  - Ca. 80%: Probleme werden mit Studentenbeteiligung gelöst (mit Pausen zu Eigenarbeit, bis zu 5 Minuten); **dabei wird mathematisches Arbeiten transparent gemacht, z.B. werden heuristische Überlegungen formuliert und auch Irrwege ernst genommen**
  - Ca. 20%: Präsentation neuer Inhalte
- Tutorien (2h/Woche), Übungsaufgaben
- Für 1. Semester (Pflicht gymn. Lehramt), parallel zu Analysis 1
- In Oldenburg seit 2011 durchgeführt

‚Mathematisches Problemlösen und Beweisen‘: Konzept

Jeder Mathematik-Studierende kann und sollte die Erfahrung machen:

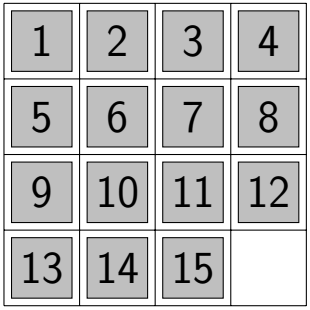
„Ich kann Mathematik entdecken.“

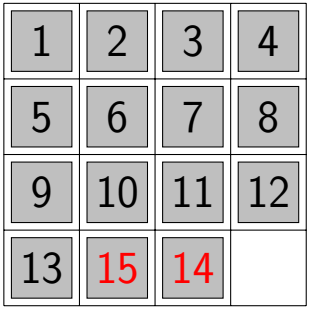
Konkret:

- Probleme lösen (in VL, Tutorien und Hausaufgaben)
- Problemlösestrategien lernen
- Beweise an elementaren, meist vertrauten Inhalten, *zum Erkenntnisgewinn*
- Höhere Beweisstrategien, Grundprinzipien der Mathematik
  (Bsp: Extremalprinzip, Invarianten)
- Sprache: Alltagssprachlich formulierte Beweise sind gültig
  (präzise Logik $\neq$ formale Sprache)
- Inhalte: Aufbauend auf Mittelstufe (Zahlen, Geometrie), zusätzlich z.B. Graphen, Kombinatorik, elementare Zahlentheorie, Permutationen
- Vorbereitend für andere Studieninhalte

Beispiele

1. (Erste VL) *Mit wie vielen Nullen endet* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 100$*?*
   - Problem leicht zu verstehen, Lösung erscheint zunächst schwierig
   - Strategien: Vereinfachen (z.B. 5!, 6!); sich schrittweise vorarbeiten
   - Man versteht nach und nach, was wichtig ist
   - Fortschritt und Erfolg sind greifbar
2. (Letzte VL) Beim 15er-Puzzle liegen 15 Steine auf einem 4×4 Feld. Man kann sie horizontal und vertikal verschieben.
   Zeigen Sie, dass man die rechte Anordnung niemals in die linke Anordnung überführen kann.





Übergang Schule - Hochschule

Schule: Mathematik wird vielfach als Sammlung von Rechenrezepten erlebt

Studium: neue Sprache, Abstraktion, Allgemeinheit, Axiomatik (AAA),...

Für die meisten Studierenden ist ...

- ... schwer nachvollziehbar, wozu AAA gut sein sollen
- ... Beweisen keine gefühlte Notwendigkeit
- Sie haben sich nie ernsthaft eine mathematische Frage gestellt
- Sie können daher die Theorien (Antworten) nicht wertschätzen

Beispiele von Aussagen, die in Analysis I bewiesen werden:

- $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ *Axiomatik*
- Zwischenwertsatz *Test für Konzepte*
- $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, $\mathbb{R}$ ist überabzählbar *unerreichbare Genialität (+ schön)*

Als erste Beweise geeignet?

Psychologische Faktoren

Für Studienerfolg wichtige Faktoren:

- Aufnahmebereitschaft, Neugierde
- Erfolgserlebnisse
- Selbstwirksamkeitserleben
- Spaß an der Sache

Dies kann in einem problemlösenden Zugang zur Mathematik gut realisiert werden. Dieser hat weitere Vorteile:

- kann den Übergang Schule-Hochschule erleichtern
- bereitet auf Theorien vor *(Fragen vor den Antworten)*
- motiviert (Heureka-Erlebnis)
- kann für Studierende *verschiedener Leistungsniveaus* neue Erkenntnis bringen
- ist wissenschaftliche Methode (Forschendes Lernen)

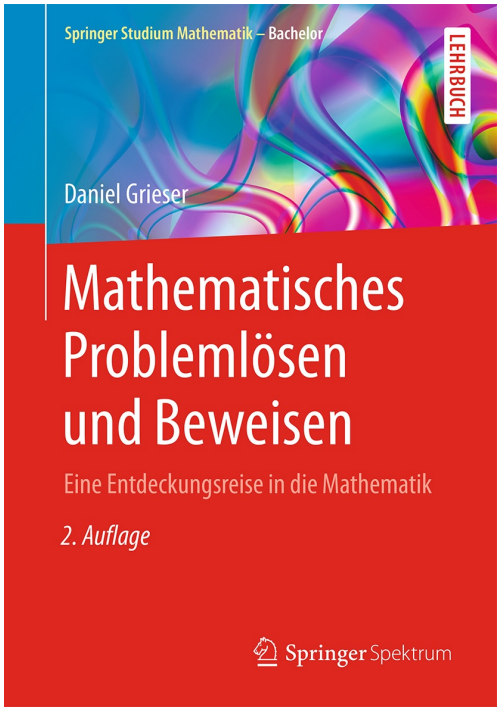
Rückblick, Evaluation

- Hohe Motivation durch:
  - Studierende **fühlen sich ernst genommen**: Sie können verwenden, was sie kennen, worin sie gut sind (und lernen Neues)
  - Studierende sehen, dass dies **für ihren Beruf relevant** ist (z.B. Problemlösen im Kerncurriculum der Gymnasien)
- Lernen von Problemlösetechniken macht **selbständig, stärkt das Selbstvertrauen**
- Mathematik wird als etwas erlebt, das **entsteht**, nicht als fertiges Gebäude
- Problemorientierter Zugang macht neugierig, bewirkt **Offenheit für mathematische Theorien**
- **Interaktive VL-Form** funktioniert: Eigenarbeitszeit wird von den meisten genutzt, hilft beim Verständnis
- **Klausur:** Beweisaufgaben von $> 50\%$ sinnvoll bearbeitet
- **Evaluation:** WiGeMath 2016/17: u.a. erhöhte intrinsische Motivation, Selbstwirksamkeitserwartung

Literatur (Auswahl)

G. Pólya, *Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren*, 1966.

H. Winter, *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*, 1989.

D. Grieser, *Mathematisches Problemlösen und Beweisen – Eine Entdeckungsreise in die Mathematik*, Springer-Verlag, 2. Auflage 2017.

A. Beyer, D. Grieser und S. Schlüters, *Mathematisches Problemlösen und Beweisen in Oldenburg*, in: Unterstützungsmaßnahmen in mathematikbezogenen Studiengängen..., Hrsg: R. Hochmuth, R. Biehler, M. Liebendörfer und N. Schaper 2022.